INTRODUCCION

A LA

GEOMETRIA MODERNA

POR

LEVI S. SHIVELY, PH.D.

Profesor Emérito de Matemáticas del
"Ball State Teachers College".

CIA. EDITORIAL CONTINENTAL, S. A. DE C. V., MEXICO

DISTRIBUIDORES:

ESPAÑA-ARGENTINA-CHILE-VENEZUELA-COLOMBIA-PERU

Bolivia — Brasil — Costa Rica — Dominicana — Ecuador — El Salvador
Estados Unidos — Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá — Paraguay
Portugal — Puerto Rico — Uruguay

Título original en inglés:

AN INTRODUCTION TO MODERN GEOMETRY

Traducido por:

ANDRÉS PALACIOS PRIEGO
Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México

Revisado por:

ANDRÉS SESTIER BOUCLIER
Maestro en Ciencias

Edición autorizada por:

JOHN WILEY & SONS, INC. NEW YORK

Decimatercera impresión
agosto de 1984

Derechos Reservados © en Legua Española–1961, Primera Publicación

CIA. EDITORIAL CONTINENTAL, S. A. DE C. V.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

DISTRIBUIDORES PRINCIPALES EN:

CAVANILLES NÚM. 52, MADRID 7, ESPAÑA
AV. CANNING NÚMS. 96, 98 Y 100, ESQ. PADILLA,
1414 BUENOS AIRES, ARGENTINA
MIRAFLORES NÚM. 354, SANTIAGO DE CHILE, CHILE
VEN-LEE, C. A., AV. FUERZAS ARMADAS, ESQ. SAN MIGUEL
EDIFICIO RODRIMER, PISO 6, CARACAS, VENEZUELA
CALLE 11 NÚM. 2-56, BOGOTÁ, COLOMBIA
AV. REPÚBLICA DE PANAMÁ NÚM. 2199, LA VICTORIA–LIMA 13, PERÚ

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

PREFACIO

La intención de este libro es que sirva como texto en los cursos que se imparten en los colegios o universidades y a los cuales se les ha designado con los nombres de Geometría Avanzada o Geometría Moderna. Durante la última década ha aumentado decididamente el interés por tales cursos, con especialidad en las instituciones cuyo objetivo es la preparación de profesores en matemáticas avanzadas. El autor tiene la certeza de que cada uno de los profesores en potencia debería estudiar como parte de su equipo de trabajo una parte de la geometría, comúnmente llamada geometría moderna, y que se desarrolló desde los tiempos de Euclides hasta tiempos comparativamente recientes.

Se ha intentado seleccionar el material a que nos referimos y presentarlo en forma tal, que el estudiante que haya cursado álgebra superior, trigonometría plana y elementos de trigonometría, pueda beneficiarse con su estudio. Sin embargo, es evidente que se desea cierta madurez en matemáticas generales de parte de quienes utilicen la obra, además de los conocimientos mínimos antes indicados.

Aun cuando el orden del desarrollo de la obra, arreglado por capítulos y temas, es lógico, no se ha intentado subrayar los fundamentos lógicos (axiomáticos) del tema. Por tanto, no se dan listas de suposiciones y términos indefinidos. Se da por sentado que ya ha quedado establecida una base de trabajo adecuada y que el lugar para el estudio de los fundamentos se encuentra en cursos más avanzados. Similarmente, no se ha prestado atención a elementos imaginarios. Cuantitativamente, se encontrará que el material del texto es suficiente para los cursos normales trimestrales o semestrales.

Se llama especialmente la atención sobre el capítulo relativo a construcciones con regla y compás (Cap. 11). Cierta parte del material que en él se presenta no es fácil que se encuentre en ningún otro texto para estudiantes que toman

un primer curso de geometría moderna. Se ha incluido debido a que la experiencia ha demostrado que es de mucho interés, estimulante y de gran valor tanto para el profesor como para el estudiante.

Se incluye un grupo de ejercicios variados al final del último capítulo. Estos complementarán a los que se presentan a través de todo el texto, cuando se juzgue necesario introducirlos. Algunos de éstos sugieren material para los cuestionarios semestrales.

No se pretende que la presente obra sea en ningún sentido un tratado completo sobre la geometría moderna. Más bien, como su título lo indica, no es sino una introducción a tan vasto campo. La bibliografía, que también está lejos de ser completa o exhaustiva, anota algunos textos y tratados sobre el tema, en algunos casos más extensos. La mayor parte de las bibliotecas universitarias contarán con algunas de estas obras por lo menos. Todas las que se mencionan se han utilizado en la preparación de este libro.

Deseo expresar mis agradecimientos al profesor L. H. Whitcraft y al profesor P. D. Edwards por la ayuda que me proporcionaron en la preparación de esta obra. El último de los citados corrigió gran parte del original haciendo muchas útiles sugestiones.

L. S. SHIVELY

Muncie, Indiana.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

INTRODUCCION

CAPÍTULO 2

SEMEJANZA

CAPÍTULO 3

TEOREMAS DE CEVA Y MENELAO

CAPÍTULO 4

PUNTOS Y LINEAS ARMONICOS

CAPÍTULO 5

EL TRIANGULO

CAPÍTULO 6

CIRCUNFERENCIAS COAXIALES

CAPÍTULO 7

INVERSION

CAPÍTULO 11

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

CAPÍTULO 12

TEOREMAS Y PROBLEMAS SELECTOS

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 Segmentos lineales dirigidos. La inclusión de los números negativos significó un adelanto notable en el sistema de los números del álgebra. Trajo consigo avances mayores de los que pudieron prever aquellos que tomaron parte en realizarlo.

Si en una línea recta (Fig. 1) tomamos dos puntos distintos A y B, ellos nos determinarán un segmento de línea. En geometría elemental nos referimos a este segmento como el segmento AB y usualmente estamos interesados nada más en su longitud. Podemos, sin embargo, asociar a la idea de segmento, la idea de dirección. Así si la porción de línea entre estos dos puntos la imaginamos extendida de A a B, tenemos el *segmento dirigido* AB, mientras que si lo vemos de B a A tenemos el *segmento dirigido* BA. Las magnitudes de los segmentos dirigidos AB y BA son las mismas, pero sus direcciones son opuestas. Esta diferencia en direcciones es análoga a la diferencia en signos de los números algebraicos y es convenientemente indicada por medio de tales signos.

A B C

FIG. 1

En lo sucesivo, cuando hablemos de un segmento de línea, se entenderá un segmento dirigido, a menos que claramente se considere el segmento de línea no dirigido.

1.2 Relaciones entre segmentos lineales dirigidos. Los segmentos dirigidos AB y BA son, como se ha señalado anteriormente, iguales en magnitud, pero opuestos en dirección. Estos hechos están indicados por la ecuación

$$AB = -BA$$

o por la ecuación equivalente

$$AB + BA = 0$$

Si A, B y C son tres puntos diferentes en una línea recta,

$$AB + BC + CA = 0.$$

En el caso de que los puntos A y B coincidan, podemos considerar como si ellos determinaran un segmento AB de longitud cero. Todas las relaciones de esta sección son válidas cuando, debido a estas coincidencias alguno o todos los segmentos incluidos tienen longitud cero. Extensiones obvias de las relaciones anteriores son posibles cuando se consideran más de tres puntos en la misma línea recta.

Si A, B, C y D son cuatro puntos cualesquiera en una línea y consideramos los segmentos que determinan, tenemos la útil identidad siguiente, conocida como el Teorema de Euler:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

Esto se prueba haciendo notar que el miembro de la izquierda puede ser puesto en la forma

$$(DB - DA)CD + (DC - DA)DB + (DC - DB)AD,$$

cuyo desarrollo y simplificación muestra cómo se anula.

1.3 Razón de partición de un segmento de línea. Si P es un punto cualquiera en la línea AB (A distinto de B) ya sea entre A y B o externo al segmento AB, se dice que divide al segmento AB en la razón $AP : PB$. Si P está entre A y B divide al segmento *internamente* y la razón de partición es positiva; si está fuera del segmento AB divide al segmento *externamente*, y la razón de partición es negativa. Así en la Fig. 2 los puntos P y Q dividen AB interna y externamente en las razones $AP : PB$ y $AQ : QB$ respectivamente. Si P coincide con A o B, el segmento no está *propiamente* dividido por P. Puede decirse entonces que lo divide *impropiamente*, la razón de partición es cero o infinito según P coincida con A o con B. Puede hacerse una discusión para tratar el poco frecuente, pero importante caso en el cual el segmento tiene longitud cero.

Cuando cuatro puntos A, B, P y Q están situados de tal manera que P y Q dividen a AB interna y externamente en razones numéricamente iguales, esto es:

$$AP : PB = -AQ : QB,$$

Entonces se dice que P y Q dividen al segmento AB *interna y externamente en la misma razón.*

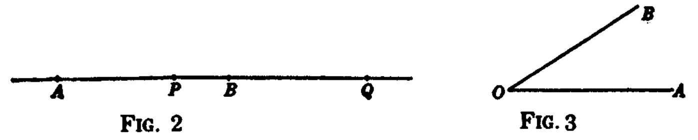


FIG. 2 FIG. 3

Es fácil demostrar que si dos puntos dividen un segmento de línea en razones iguales, los dos puntos coinciden. (Ver Ejercicio 15, Pág. 21).

1.4 Angulos dirigidos. Es conveniente asociar la idea de dirección no sólo con los segmentos de línea sino también con los ángulos. El ángulo formado por las líneas OA y OB (Fig. 3) puede ser generado por una línea en movimiento que gira con eje en O de la posición OA a la posición OB en el sentido opuesto al avance de las manecillas del reloj, o puede ser generado por rotación en el mismo eje de la posición OB a la posición OA en el sentido del avance de las manecillas del reloj. Si en cada una de estas rotaciones la misma porción de plano es barrida por la línea en movimiento, los ángulos así generados son iguales en magnitud, pero opuestos en signo. Cuando la rotación es en sentido contrario al sentido de las manecillas, el signo del ángulo resultante es por convención considerado como positivo; y cuando la rotación es en el sentido de las manecillas, el signo del ángulo es negativo. De los dos ángulos descritos arriba, el positivo es designado ángulo AOB y el negativo como el ángulo BOA.

Podemos notar (Fig. 3) que hay un ángulo positivo BOA así como un ángulo negativo BOA, a saber, la rotación de OB alrededor de O, en el sentido opuesto al de las manecillas que lleva a OB a coincidir con OA.*

Con relación a su utilidad es frecuentemente ventajoso considerar el ángulo positivo AOB como la rotación de la lí-

* Existe, en efecto, ilimitado número de rotaciones que hacen esto y, por lo tanto, hay un número infinito de ángulos positivos BOA. Asimismo hay infinidad de ángulos negativos BOA.

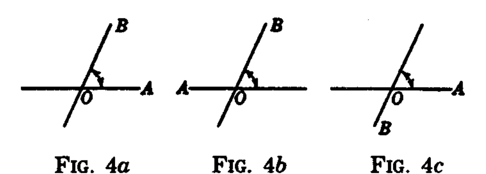


FIG. 4a FIG. 4b FIG. 4c

nea *completa* OA alrededor de O, en sentido opuesto al de las manecillas, que por primera vez la lleva a coincidir con la línea *completa* OB (Figs 4*a*, *b*, *c*).

La utilidad de esta definición está en parte en el hecho de que sirve para quitar ambigüedades. Por ejemplo, la muy conocida afirmación: si los lados de dos ángulos son paralelos respectivamente, son iguales o suplementarios; es con esta convención: si los lados de dos ángulos son paralelos respectivamente los ángulos son iguales. Así, si en una prueba se asegura que dos ángulos son iguales porque sus lados sean respectivamente paralelos, se entenderá que se refiere a ángulos dirigidos en el sentido explicado anteriormente. El estudiante deberá dibujar varias figuras para ilustrarse.

Se tiene también que tal definición identifica situaciones que en otros casos serían consideradas distintas, como esencialmente iguales. Como un ejemplo de esto, vemos que si usamos ángulos no dirigidos, la condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos P, P', A y B, estén en una circunferencia, estando P y P' del mismo lado de la línea AB; es que el ángulo APB sea igual al ángulo $AP'B$ (Fig. 5). Pero si P y P' están en lados opuestos de AB, esta condición es que el ángulo APB sea el suplemento del ángulo $AP'B$. Cuando se usan ángulos dirigidos, en la forma explicada anteriormente, las dos situaciones no son esencialmente diferentes y el resultado puede ser enunciado en la forma: la condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos P, P', A y B estén en una circunferencia es que los ángulos APB y $AP'B$ sean iguales.

En las pruebas de algunos teoremas, se encuentran varios casos a los cuales hay que darles un tratamiento por separado si los ángulos incluidos son considerados como no dirigidos. Considerando ángulos dirigidos estos casos por separado, que aparentemente pueden parecer como fundamentalmente diferentes, se encuentra que son aspectos similares de uno y pueden todos ser tratados juntos.

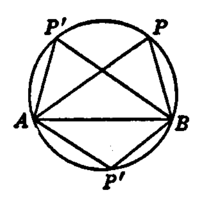


FIG. 5

Será necesario el criterio del lector para determinar cuándo debe considerarse un ángulo como dirigido o no, en alguno de los sentidos explicados anteriormente. Pero esto generalmente no es más difícil o incierto que cuando se debe decidir si el término *línea* significa una línea curva o una línea recta, y si es una línea recta, cuándo es completa y cuándo es un segmento.

1.5 Una generalización importante. En geometría elemental encontramos el siguiente

TEOREMA: *La bisectriz de un ángulo en un triángulo, divide el lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo.*

En algunos de los desarrollos subsecuentes haremos uso de lo siguiente, que es una generalización del teorema antes mencionado.

TEOREMA: *Si el vértice A del triángulo ABC es unido a cualquier punto L en la línea BC, entonces*

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \cdot \text{sen}\, BAL}{CA \cdot \text{sen}\, LAC}$$

Esto puede ser probado aplicando la ley de los senos a los triángulos ABL, ALC (recordando en la Fig. 6*a* que, sen ALB = sen CLA). El estudiante deberá probarlo tomando especial cuidado en los signos algebraicos usados en los dos casos.

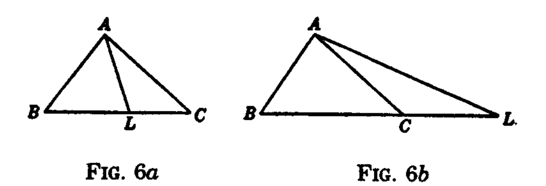


FIG. 6*a* FIG. 6*b*

1.6 Correspondencia uno a uno (biunívoca). La idea de correspondencia biunívoca es fundamental en toda la estructura de las matemáticas. Para presentar esto, consideremos dos clases o conjuntos de objetos de cualquier tipo. Estos conjuntos se dice que están en correspondencia biunívoca cuando a cada objeto de un conjunto corresponde uno y sólo un objeto del otro conjunto. Esto implica un apareamiento de objetos de los dos conjuntos. Es indife-

rente cómo se realiza este apareamiento, siempre que dos objetos que pertenecen al mismo par sean tomados uno de cada conjunto, y cada objeto sea usado una vez y sólo una.

Ejemplos. (*a*) Los vértices de un triángulo y sus lados pueden ser puestos en correspondencia biunívoca, apareando cada vértice con su lado opuesto.

(*b*) Si dos polígonos tienen el mismo número de lados, sus lados así como sus ángulos, pueden ser puestos en correspondencia biunívoca. Esta correspondencia es de importancia en el estudio de la similaridad de los polígonos y la usaremos en el siguiente capítulo.

(*c*) El conjunto de todas las líneas que pasan por O (Fig. 7) contenidas en el ángulo agudo AOB pueden ser puestas en correspondencia biunívoca con el conjunto de todos los puntos del segmento de línea AB que están entre A y B. Una manera en que esto puede ser realizado es asociar cada línea con el punto en que corta en AB.

1.7 Puntos al infinito. Consideremos (Fig. 8) una línea AB y un punto O fuera de ella. Cualquier línea no paralela a AB y que pasa por O interseca a AB en un punto P y si esta línea gira con centro en O, el punto P se mueve a lo largo de AB. Más aún, cada punto de AB está determinado como la intersección de AB con una línea que pasa por O. Si el punto P de la línea AB es apareado con la línea OP se establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de AB y las líneas que pasan por O, con la sola excepción de la línea que pasa por O y es paralela a AB.

De acuerdo con la definición euclidiana * estamos acostumbrados a considerar dos líneas paralelas como aquellas que no tienen ningún punto en común. Aunque este punto de vista puede ser más satisfactorio a nuestra intuición es lógicamente permisible y aun deseable, asociar la línea AB con un

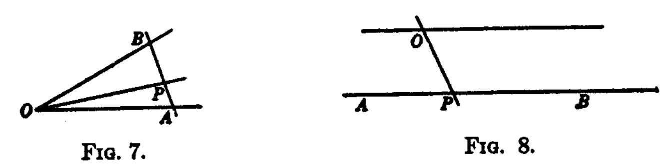


Fig. 7. Fig. 8.

punto ideal llamado *punto al infinito, en* AB, el cual tiene la propiedad de que la línea que pasa por O paralela a AB, interseca con AB en este punto ideal. Si esto se realiza, la ex-

* La definición de Euclides dice que dos líneas son paralelas, si están en el mismo plano y no se cruzan, no importa cuanto se prolonguen.

cepción antes mencionada desaparece, y podemos decir que cualquier línea del plano que pasa por *O*, interseca a la línea *AB*. Uno de los puntos de intersección es el punto al infinito en *AB*. Todos los puntos que restan son los puntos reales de la línea *AB*.

Se sigue que hay, en cada conjunto de líneas paralelas en el plano, uno y el mismo punto al infinito. Esto sugiere que el punto al infinito en una línea es lógicamente un equivalente de la dirección de esta línea. Ya que hay infinidad de direcciones en el plano, hay infinidad de puntos al infinito en el plano. El lugar geométrico de todos estos puntos al infinito, tiene la propiedad de ser intersecado por una línea recta arbitraria en uno y sólo un punto. Entonces este lugar geométrico queda definido como una recta ideal, *la línea al infinito*.

Volviendo al punto O y la línea *AB*, podemos ahora establecer una correspondencia biunívoca entre todas las líneas del plano que pasan por *O* y todos los puntos de *AB*, apareando cada línea con el punto en el cual interseca *AB*. Inherente al perfeccionamiento de esta correspondencia es la utilidad de la noción de los puntos ideales y la línea ideal que han sido agregados a los puntos y líneas usuales del plano.

1.8 Hileras y haces. Puntos que están en la misma línea recta se dice que son *colineales*. Si ciertos puntos son colineales constituyen una *hilera* de puntos. La línea en la cual están situados es la *base* de la hilera.

Líneas que pasan a través de un mismo punto se dice que son *concurrentes*. Si un cierto número de líneas son concurrentes, constituyen un *haz* de líneas. Las líneas individuales del haz son frecuentemente llamadas *rayos*, y el punto al través del cual pasan estas líneas es el *centro* o *vértice* del haz.

Un haz de líneas puede consistir en un conjunto de líneas paralelas. El vértice de dicho haz es el punto al infinito. Así también una hilera de puntos puede consistir en un número de puntos al infinito, en cuyo caso la base de la hilera es la línea al infinito.

EJERCICIOS

1. Establezca de una manera distinta a la del Ej. (*a*) de la Sección 1.6, una correspondencia biunívoca entre los vértices y los lados de un triángulo.

2. Establezca en forma diferente al Ej. (*c*) de la Sección 1.6 una correspondencia biunívoca entre las líneas y puntos.

3. Muestre cómo la cuenta ordinaria de los objetos de un grupo, tales como los estudiantes de una clase, ilustra la correspondencia biunívoca. En este caso uno de los conjuntos son los estudiantes contados. ¿Cuál es el otro conjunto? Muestre que la forma particular del apareamiento es indiferente.

4. ¿En cuántas maneras pueden ser colocados en una línea recta tres puntos distintos A, B y C? ¿Vale la ecuación $AB + BC + CA = 0$ para cada una de estas formas?

5. Generalice las ecuaciones del principio de la Sección 1.2 considerando más de tres puntos en una línea.

6. ¿Qué puede usted decir de la noción de segmento de línea dirigido, cuando los puntos A y B de la Sección 1.1 no son distintos? Muestre cómo la ecuación $AB + BC + CA = 0$ es válida cuando los puntos A, B y C, no son todos distintos.

7. Si la longitud de AB son 8 unidades, ¿cuál es el punto que divide a AB en la razón $3 : 1$? ¿En la razón $3 : -1$?

8. Haga una construcción geométrica para los puntos que dividen un segmento de línea dado en las razones $a : b$ y $a : -b$ (a y b positivos).

9. Demuestre que los puntos de un segmento de línea, pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los puntos de otro segmento de línea, dos veces más largo que el primero.

10. Muestre que los enteros positivos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los enteros positivos pares.

11. Justifique las siguientes proposiciones:

(*a*) Toda línea en un plano se interseca con cualquier otra línea del plano.

(*b*) El conjunto de todas las líneas en un plano que pasan por un punto, puede ser puesto en correspondencia biunívoca con el conjunto de todos los puntos de cualquier línea en el plano.

(*c*) Una línea recta tiene un solo punto al infinito. ¿Es esto verdad sin excepción?

(*d*) Un segmento AB es dividido externamente por el punto al infinito en la línea del segmento, en la razón $1 : -1$.

(*e*) Tres líneas en un plano determinan un triángulo, o todas pasan por un punto.

12. Muestre por medio del teorema de la Sección 1.5 que si P es el punto medio de BC en el triángulo ABC, y si AB es menor que CA, el ángulo PAC es menor que el ángulo BAP.

13. Pruebe que si A, B y C son tres puntos colineales y D es cualquier cuarto punto,

$$\overline{DA}^2 \cdot BC + \overline{DB}^2 \cdot CA + \overline{DC}^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0.$$

Sugerencia: Considere primero el caso en que D está en la línea. Después dibuje una perpendicular de D a la línea.

14. ¿Qué teoremas ha encontrado usted en geometría elemental en los cuales se incluya la idea de división de un segmento de línea en razón interna y externa iguales?

15. Muestre que si dos puntos dividen un segmento de línea en razones iguales, los dos puntos coinciden.

16. Las líneas de dos haces con diferentes vértices están en correspondencia biunívoca de tal manera que son colineales las intersecciones de líneas correspondientes. Encontrar un par de líneas perpendiculares en el primero, para el cual las líneas correspondientes en el otro, sean también perpendiculares.

17. Si A, B y C son puntos en la misma línea, y si P, Q, R son los puntos medios de BC, CA, AB respectivamente, muestre que el punto medio de CR coincide con el de PQ.

18. Si OA, OB, OC, OD son cuatro líneas de un haz cuyo vértice es O, demostrar que

$$\text{sen } AOB \cdot \text{sen } COD + \text{sen } AOC \cdot \text{sen } DOB + \text{sen } AOD \cdot \text{sen } BOC = 0$$

CAPITULO 2

SEMEJANZA

2.1 Polígonos semejantes. Dos polígonos con el mismo número de lados son *semejantes*, si sus lados correspondientes son proporcionales, y sus ángulos correspondientes son iguales. La correspondencia aquí mencionada es biunívoca, y es de tal forma que a cada par de lados consecutivos, en un polígono, y el ángulo entre ellos, corresponde un par de lados consecutivos y el ángulo incluido entre ellos en el otro.

Estos dos polígonos se dice que son *directamente semejantes o inversamente semejantes* según que las partes correspondientes estén colocadas en el mismo orden o en el inverso.

Se prueba en geometría elemental que cuando los polígonos son triángulos la igualdad de sus ángulos se concluye de la proporcionalidad de sus lados; y la proporcionalidad de sus lados se concluye de la igualdad de sus ángulos.

2.2 Figuras homotéticas. Si unimos los vértices de un polígono a un punto O del plano, y a cada una de estas líneas de unión las dividimos en la misma razón, los puntos de división son los vértices de un polígono semejante. Más generalmente, consideremos cualquier figura plana, que consista en el sistema de puntos $A, B, C, \ldots$ y sean las líneas $OA, OB, OC, \ldots$ las que unen estos puntos a cualquier punto O del plano. Si $A', B', C', \ldots$ son puntos de estas líneas respectivamente y si existe un número k tal que

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \cdots,$$

entonces la figura formada por los puntos $A', B', C', \ldots$ es *semejante* a la figura dada, y está *semejantemente colocada.* Se sigue inmediatamente que, si tres o más puntos de una figura dada están en una línea recta, los puntos correspondientes de la segunda figura están también en una línea recta y estas dos líneas son paralelas.

Dos figuras semejantes colocadas semejantemente, se llaman figuras *homotéticas.* El punto O es su *centro de homotecia* y la constante k es su *razón de homotecia.* La razón homotética de dos figuras homotéticas es también llamada *razón de similitud,* y su centro de homotecia es llamado *centro de similitud.*

2.3 Simetría con respecto a un punto. La razón de similitud puede ser positiva o negativa. Un caso importante y especial de esto último, es aquel en el cual tiene el valor -1. Las dos figuras se dice que son *simétricas* con respecto al punto O como *centro de simetría.* Así, si la circunferencia de un círculo está dividida en dos medias circunferencias por cualquier par de puntos diametralmente opuestos, estas dos medias circunferencias son simétricas con respecto al centro del círculo como centro de simetría. Algunas veces mencionamos este hecho, diciendo que un círculo es simétrico con respecto a su centro. El cuadrado, el rectángulo y el rombo, son cada uno simétrico con respecto a su centro.

2.4 Líneas antiparalelas. Si dos pares de líneas están en tal forma que la bisectriz del ángulo formado por el primer par, es transversal al segundo par y los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son iguales, las líneas del segundo par son *antiparalelas* la una a la otra, con respecto a las líneas del primer par. En la Fig. 9, las líneas c y d forman ángulos iguales α y β con l como bisectriz del ángulo formado por las líneas a y b. Entonces c y d son antiparalelas con respecto a a y b.

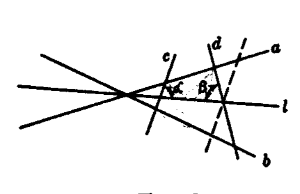


FIG. 9

Si una de las dos antiparalelas es girada 180° alrededor de la bisectriz l, queda paralela a la otra. Esta es la propiedad que sugiere el uso del término antiparalelo.

Puesto que las líneas c, d y l, determinan un triángulo isósceles, * se sigue que la bisectriz de uno de los ángulos formados por c y d es perpendicular a l y que esta bisectriz y

* Si c y d se intersecan en l, este triángulo degenera en un punto. Pueden hacerse modificaciones en la discusión referente a la definición anterior para cubrir este caso.

El lector deberá discutir las antiparalelas con respecto a un par de líneas paralelas, poniendo especial atención al problema de las bisectrices de dos líneas paralelas.

las líneas, *a* y *b*, también determinan un triángulo isósceles. Por lo que tenemos

TEOREMA: *Si dos pares de líneas están colocadas de tal forma que las líneas del primer par son antiparalelas con respecto a las líneas del segundo par, entonces las líneas del segundo par son antiparalelas con respecto al primero.*

EJEMPLOS. (*a*) En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa y uno de los lados perpendiculares son antiparalelos con respecto a los otros dos lados del triángulo.

(*b*) Los lados no paralelos de un trapecio son antiparalelos con respecto a los lados paralelos.

(*c*) Dos líneas paralelas son antiparalelas con respecto a otras dos, si las primeras son perpendiculares a la bisectriz de uno de los ángulos del ángulo formados por las otras dos. En particular, en un rectángulo, cada par de lados opuestos es antiparalelo con respecto a los otros dos lados. Así también las bases de un trapecio son antiparalelas con respecto a los lados no paralelos.

2.5 Cuadriláteros cíclicos. Si un conjunto de puntos están todos en la misma circunferencia, se dice que estos puntos son *concíclicos*. Un cuadrilátero cuyos vértices son concíclicos, es llamado un *cuadrilátero cíclico*.

Se prueba fácilmente que cuando los dos pares de líneas de la Fig. 9, se intersecan en cuatro puntos distintos y forman un cuadrilátero convexo, sus ángulos opuestos son suplementarios; si forman un cuadrilátero cruzado, estos ángulos son iguales en magnitud. Así en cada caso los cuatro puntos son concíclicos y el cuadrilátero que determinan es un cuadrilátero cíclico.

TEOREMA: *Si dos líneas que son antiparalelas con respecto a otras dos, cortan a estas últimas en cuatro puntos distintos, estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrilátero cíclico; e inversamente, cada par de lados opuestos en un cuadrilátero cíclico, es antiparalelo con respecto al otro par.*

2.6 Teorema de Ptolomeo. Un famoso teorema de cuadriláteros cíclicos debido a Ptolomeo (150 D. C.) y usado por él en *El Almagest*, es el siguiente: *

* Ver: Sanford, *A Short History of Mathematics*, Boston, 1930, Págs. 293-295. También, M. Halma, *Composition mathematique de Claude Ptolémé*, Vol. I, Págs. 26-46.

TEOREMA: *El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico, es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*

En la Fig. 10, dibujemos la línea AE, formando el ángulo DAE igual al ángulo CAB y hagámosla intersecar DB en E. Entonces, puesto que los triángulos DAE y CAB son semejantes, se infiere por la proporcionalidad de sus lados que $AD \cdot BC = ED \cdot AC$. Y de los triángulos semejantes ADC y AEB, tenemos también $AB \cdot CD = BE \cdot AC$. Sumando estas ecuaciones y señalando que $BE + ED = BD$, tenemos $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

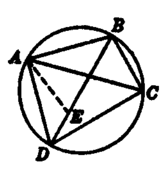


FIG. 10.

El inverso de este teorema es verdad. Su prueba se sugiere al estudiante como un ejercicio. (Ver Ejercicio 13, Pág. 27).

EJERCICIOS

1. La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide el triángulo en dos triángulos directamente semejantes, cada uno de los cuales es inversamente semejante al triángulo dado.
2. Si, con respecto a un par de líneas, dos líneas son antiparalelas a una misma tercera línea, ellas son paralelas.
3. Si unimos los puntos medios de los lados de un triángulo, obtendremos un triángulo homotético al triángulo dado.
4. Colocar dos triángulos convenientes en posición homotética, de tal forma que su razón homotética sea negativa. Hacerlo con varios centros de homotecia.
5. Si tres o más triángulos directamente semejantes, son colocados de tal forma que un conjunto de vértices correspondientes coincidan, y un segundo conjunto sea colineal, el tercer conjunto es también colineal.
6. Si cuatro o más triángulos directamente semejantes son colocados de tal forma que un conjunto de vértices correspondientes coincidan, y un segundo conjunto sea concíclico, el tercer conjunto es también concíclico.
7. Si dos polígonos son homotéticos a un tercero, son homotéticos entre sí.
8. Si el triángulo ABC es inscrito, * una línea paralela a la tangente en A, es antiparalela a BC con respecto a AB y AC.
9. En la Fig. 10, si DB es un diámetro, el ángulo $BDA = x$, el ángulo $CDB = y$, probar que $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$.

* *N. del T.* Considerando en todos los casos las figuras inscritas o circunscritas a una circunferencia.

10. Discuta cuidadosamente el Teorema de Ptolomeo, cuando $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico cruzado.

11. Verifique numéricamente el Teorema de Ptolomeo para cada uno de los siguientes cuadriláteros inscritos en una circunferencia cuyo radio es la unidad.

(a) Un cuadrado.

(b) Un trapecio isósceles uno de cuyos lados es un diámetro y sus otros tres lados iguales.

(c) Un rectángulo cuyas dimensiones están en la relación 1 : 2.

12. Demuestre que el Teorema de Ptolomeo aplicado a un rectángulo, da el Teorema de Pitágoras.

13. Probar el inverso del Teorema de Ptolomeo.

14. Construya un cuadrilátero cíclico dados sus cuatro lados.

15. Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico convexo, cuyas diagonales se cortan en O, entonces $AB \cdot BC \cdot OD = CD \cdot DA \cdot BO$.

16. Haciendo uso del Teorema de Ptolomeo encuentre la razón de la diagonal de un pentágono regular a su lado. Haciendo uso de esta razón, probar que $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

17. Haciendo uso de los resultados del ejercicio anterior, inscriba un pentágono regular, y muestre que la razón de sus lados al radio es $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

18. Construya la figura que sea simétrica a un triángulo dado cuando el centro de simetría esté dentro del triángulo; en un lado; en un vértice, y fuera del triángulo.

19. Demuestre que existen tres pares de líneas, tales que cada par es antiparalelo con respecto a cada uno de los otros pares.

2.7 Circunferencias homotéticas. Si dos circunferencias son concéntricas, evidentemente son homotéticas, siendo el centro de las circunferencias el centro de homotecia y la razón de sus radios la razón de homotecia.

Consideremos dos circunferencias no concéntricas. Unamos el centro O de una de ellas a cualquier punto A de la circunferencia, no colineal con los centros. Dibujemos el diámetro de la otra circunferencia paralelo a OA cortando la circunferencia en A' y A''. Hagamos que AA' y AA'' corten a la línea de los centros en H y K respectivamente. Entonces el triángulo OAH es similar al triángulo $O'A'H$, y el triángulo OAK es similar al triángulo $O'A''K$. De esto se sigue que las dos circunferencias son homotéticas en dos formas, siendo los puntos H y K los centros de homotecia. Más aún, H y K dividen el segmento OO' interna y externamente en la razón de los radios de las circunferencias.

Puede ser probado fácilmente que si las circunferencias tienen tangentes externas comunes, ellas se encuentran en el punto K de la línea de los centros, y que si tienen tangentes internas comunes, ellas se cortan en el punto H. De lo cual tenemos el

TEOREMA: *Si dos circunferencias tienen tangentes externas comunes, estas tangentes pasan por uno de sus centros de homotecia, y si tienen tangentes internas, éstas pasan por el otro centro de homotecia.*

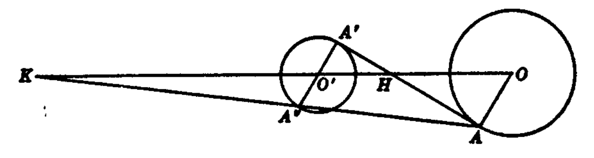


FIG. 11

2.8 Puntos homólogos y antihomólogos. Si una línea que pasa por un centro de similitud de dos circunferencias no concéntricas, interseca una de ellas en dos puntos distintos, intersectará también la otra en dos puntos distintos. Estos cuatro puntos de intersección, son homotéticos en pares, y los dos puntos de cada par homotético, son llamados *puntos homólogos*. Pero pueden ser apareados de tal forma que cada par contenga un punto en cada circunferencia, y no sean homotéticos. Los puntos de estos pares se dice que son *puntos antihomólogos* con respecto al centro de similitud que está en la línea que pasa por estos puntos. Así en la Fig. 12, A,A' y B,B', son pares homólogos, mientras que A,B' y $A'B$ son pares de puntos antihomólogos con respecto al centro de homotecia K.

2.9 Propiedades de los puntos homólogos y antihomólogos. En las Figs. 12, A',B y C',D son pares de puntos antihomólogos con respecto al mismo centro de similitud y están en distintas líneas que pasan por dicho centro. Así también A,A', B,B', C,C', D,D', son pares homólogos. Algunas propiedades referentes a estos puntos son las siguientes:

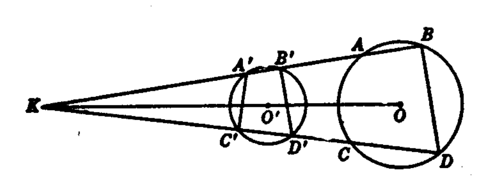


FIG. 12

(1) $B'D'$ es paralela a BD, y los triángulos $KB'D'$, y KBD son directamente similares.

(2) $A'C'$ es antiparalela a BD con respecto a $A'B$ y $C'D$, y los triángulos $KA'C'$ y KDB son inversamente semejantes. Esto por ser el ángulo $C'A'B'$ suplemento del ángulo $B'D'C'$ y por lo tanto del BDC, e inferimos que el cuadrilátero $A'C'DB$ es cíclico (Sección 2.5).

(3) El producto de los segmentos KA' y KB, es constante. Esto se ve de la semejanza de los triángulos $KA'C'$ y KDB.

(4) Cada uno de los conjuntos de puntos A', C', D, B y A, C, D', B' es concíclico.

(5) Tangentes a las circunferencias en A' y B forman ángulos iguales con la línea $A'B$. Si estas tangentes se intersecan en E el triángulo $EA'B$ es isósceles.

2.10 Circunferencia de similitud. La *circunferencia de similitud* de dos circunferencias no concéntricas, es la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une sus centros de similitud.

TEOREMA: *La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de los puntos* (1) *tales que las razones de sus distancias a los centros de las circunferencias son iguales a las razones entre los radios; y* (2) *desde los cuales las dos circunferencias subtienden ángulos iguales.*

Consideremos primero dos circunferencias desiguales y sea P (Fig. 13) un punto tal que $PO : PO' = r : r'$, donde r y r' son los radios de las circunferencias O y O', de los cuales H y K son los centros de similitud. Entonces ya que $OH : HO' = r : r'$ PH es la bisectriz del ángulo interior en P del triángulo OPO'. Asimismo, PK es la bisectriz del ángulo exterior en P del mismo triángulo. Entonces PH y PK son perpendiculares, y P está en la circunferencia de similitud.

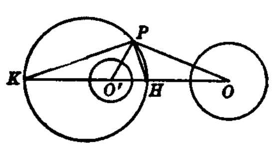


FIG. 13

Inversamente, supongamos que P está en la circunferencia de similitud. En la línea de los centros tomemos O'' tal que PH biseque al ángulo $O'PO''$. Entonces, puesto que PH y PK son perpendiculares y que bisecan los ángulos interior y exterior en P del triángulo $O''PO'$, tenemos

$$\frac{O''H}{HO'} = -\frac{O''K}{KO'}.$$

pero también

$$\frac{OH}{HO'} = -\frac{OK}{KO'},$$

de donde

$$\frac{HO''}{O''K} = \frac{HO}{OK};$$

y (Sección 1.3) O'' coincide con O. Se sigue que $PO : PO' = r : r'$.

Si se trazan tangentes de P a las circunferencias dadas, y en cada circunferencia el punto de tangencia es unido al centro de la circunferencia, se obtienen triángulos rectángulos similares de lo cual es consecuencia directa la segunda parte del teorema.

Si dos circunferencias son iguales, su circunferencia de similitud degenera en la mediatriz del segmento que une sus centros y la línea al infinito.

2.11 Círculo de Apolonio.

TEOREMA: *El lugar geométrico de los puntos cuyas razones de distancias a dos puntos fijos es una constante, es un círculo, el* **círculo de Apolonio.**

Sean los puntos fijos O y O' y la razón de sus distancias a P sea $r : r'$. Construyamos circunferencias con centros en O y O' cuyos radios tengan la razón $r : r'$. Luego por la sección inmediata anterior, el lugar geométrico de los puntos P es la circunferencia de similitud.

EJERCICIOS

1. Construir un triángulo, dada su base, su altura y la razón de sus otros dos lados.
2. Si una circunferencia es tangente a dos circunferencias no concéntricas, los puntos de tangencia son puntos antihomólogos.
3. La circunferencia de similitud de dos circunferencias que se intersecan, pasa por los puntos de intersección.
4. Si dos circunferencias se intersecan, las líneas del punto de intersección a los centros de similitud, bisecan los ángulos formados por los radios trazados a ese punto.

5. Dar todos los conjuntos de cuatro puntos concíclicos en la Fig. 12.

6. A es un punto cualquiera de la circunferencia de similitud de dos circunferencias cuyos centros son O y O'. Dibujar AO, y en ella obtener $AO'' = k \cdot AO'$. Con O'' como centro, dibujar una circunferencia cuyo radio es k veces el de la circunferencia O'. Estas circunferencias O y O'' son homotéticas con A como centro de similitud.

7. P y P' son dos puntos antihomólogos de dos circunferencias cuyos centros son O y O' respectivamente, y A es el centro de similitud que está en PP'. ¿Son semejantes los triángulos APO y $AP'O'$?

8. La bisectriz del ángulo en A del triángulo ABC, corta BC en L. Si C describe una circunferencia cuyo centro es A, y B permanece fijo, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos L?

9. La distancia entre los centros de dos circunferencias, cuyos radios son a y b, es c. Encontrar el centro de la circunferencia de similitud.

10. Los puntos medios de los lados AB, BC y CA del triángulo ABC son, L, M y N respectivamente. Probar que la tangente en A del circuncírculo del triángulo ABC, es paralela a la tangente en L del circuncírculo del triángulo LMN.

11. Si una línea variable que intersecta a dos circunferencias, pasa por un centro de similitud, las circunferencias determinan cuerdas cuya longitud tiene una razón constante.

12. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Una línea variable por A interseca las circunferencias en P y Q. Si R divide el segmento PQ en una razón dada, demostrar que el lugar geométrico de los puntos R es una circunferencia.

13. Si dos circunferencias tienen tangentes internas y externas, los cuatro puntos de intersección de las tangentes internas con las tangentes externas son concíclicos.

14. Encontrar un punto tal que sus distancias a tres puntos dados tengan razones dadas. Discutir ampliamente el número de soluciones.

15. Discutir la Sección 2.7 cuando las dos circunferencias tengan sus radios iguales.

2.12 Construcciones basadas en la similitud. Muchas construcciones geométricas pueden basarse directamente en la teoría de la similitud. Como un ejemplo resolvamos el

PROBLEMA. *Inscribir un cuadrado en un triángulo dado.*

En la línea del lado AC del triángulo dado ABC, tomamos un segmento arbitrario PS y sobre este segmento como lado construimos

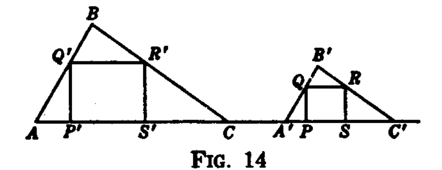


FIG. 14

el cuadrado $PQRS$ que está en el mismo lado de AC que el triángulo dado. Por Q y R dibujamos paralelas a AB y BC respectivamente, que determinan con la línea AC el triángulo $A'B'C'$. Fijamos el punto Q' que divide AB en la misma razón en que Q divide a $A'B'$, y por Q' dibujamos líneas perpendicular y paralela a AC, que cortan a AC y BC en P' y R' respectivamente. Dibujamos $R'S'$ perpendicular a AC y que la corta en S'. Así, $P'Q'R'S'$ es el cuadrado buscado, lo cual se demuestra fácilmente.

EJERCICIOS

1. Construir un triángulo semejante a un triángulo dado y teniendo un perímetro dado.
2. Construir un rectángulo semejante a un rectángulo dado, teniendo la suma de un lado y una diagonal.
3. Construir un cuadrado cuya circunferencia inscrita y dos de cuyos lados adyacentes, sean tangentes a una circunferencia dada.
4. Dado el perímetro y la razón de las diagonales de un rombo, construir el rombo.
5. Construir un pentágono regular, dada la diferencia entre su radio y apotema.
6. Construir tres circunferencias cada una de las cuales es tangente externamente a las otras dos, dada la suma de sus radios y tres segmentos a los cuales son proporcionales los radios.
7. Dos líneas dadas se intersecan en un punto inaccesible A. Se requiere: por un punto P trazar la línea PA.
8. Dibujar una circunferencia que sea tangente a dos líneas dadas y que pase por un punto dado. ¿Es la solución única?
9. Construir un triángulo que es semejante a un triángulo dado y cuyos vértices están en tres líneas paralelas dadas.
10. Inscriba en un triángulo, un triángulo cuyos ángulos estén dados.
11. Resolver el problema ilustrativo de la Sec. 2-12 por otro método.
12. En una semicircunferencia, inscribir un cuadrilátero dado, que tiene dos de sus vértices en el diámetro y los otros dos en la circunferencia.
13. Construir un triángulo, teniendo dado un lado, el ángulo opuesto al lado, y la razón de los otros dos lados.
14. Inscriba en una circunferencia dada, un triángulo isósceles cuya base y altura tengan una suma dada.
15. En una línea dada, encontrar un punto que sea equidistante a otro punto dado y a otra línea dada.
16. Construir una circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una línea dada.
17. Construya un triángulo, teniendo dado un ángulo, la suma de los lados componentes, y suma de otro par de lados.
18. Construir un triángulo, teniendo dados sus ángulos el centro de la circunferencia circunscrita y el centro de la circunferencia inscrita.

CAPITULO 3

TEOREMAS DE CEVA Y MENELAO

3.1 Concurrencia y colinealidad. Muchas de las propiedades importantes de las figuras geométricas, dependen de la concurrencia de líneas y de la colinealidad de puntos. Dos teoremas, elegantes por su poder y simplicidad, que son útiles en el establecimiento de tales propiedades, se darán en este capítulo. Uno debe su nombre a un trabajo escrito por Menelao de Alejandría cerca del final del primer siglo D.C. El otro fue publicado por el matemático italiano Ceva en 1678.

Cada uno de estos teoremas se refiere a puntos en los lados de un triángulo, vistos los lados como líneas completas determinadas por pares de vértices del triángulo.

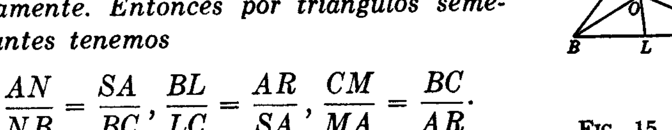
3.2 Teorema de Ceva.

TEOREMA: *Si tres líneas AO, BO y CO, dibujadas por los vértices de un triángulo ABC y un punto O de su plano, cortan los lados opuestos en L, M y N respectivamente, entonces*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1;$$

e inversamente, si L, M y N son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para los cuales se cumple la relación anterior, entonces AL, BM, y CN son concurrentes.

Hagamos que BM y CN *intersequen la* paralela a BC por A, en R y S *respectivamente. Entonces por triángulos semejantes tenemos*



$$\frac{AN}{NB} = \frac{SA}{BC}, \frac{BL}{LC} = \frac{AR}{SA}, \frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AR}.$$

FIG. 15

Multiplicando estas ecuaciones obtenemos

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$$

Para probar el inverso, hacemos que BM y CN se intersecten en O y hagamos que AO corte a BC en L'. Entonces tenemos

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$$

Pero también

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1,$$

de lo cual se sigue que $\frac{BL'}{L'C}=\frac{BL}{LC}$; entonces, L coincide con L' es decir AL pasa por O, la intersección de BM y CN.

3.3 Forma trigonométrica del Teorema de Ceva.

TEOREMA: *Si la hipótesis del Teorema de Ceva se satisface, entonces*

$$\frac{\operatorname{sen} ACN}{\operatorname{sen} NCB}\cdot\frac{\operatorname{sen} BAL}{\operatorname{sen} LAC}\cdot\frac{\operatorname{sen} CBM}{\operatorname{sen} MBA}=1;$$

e inversamente, si L, M y N son puntos de los lados BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, para el cual vale la relación anterior, entonces AL, BM y CN, son concurrentes.

Por la Sec. 1.5

$$\frac{AN}{NB}=\frac{CA\cdot\operatorname{sen} ACN}{BC\cdot\operatorname{sen} NCB},\quad \frac{BL}{LC}=\frac{AB\operatorname{sen} BAL}{CA\operatorname{sen} LAC},$$

y

$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC\cdot\operatorname{sen} CBM}{AB\cdot\operatorname{sen} MBA}.$$

Multiplicando y observando que el producto de la izquierda es igual a la unidad, obtenemos la relación deseada.

Para el inverso, los pasos en la prueba anterior, pueden ser hechos en el orden inverso, llegando a la relación

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

de lo cual se sigue que AL, BM y CN son concurrentes.

3.4 Teorema de Menelao.

TEOREMA: *Si una línea recta interseca los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC en los puntos L, M y N, respectivamente, entonces*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1;$$

e inversamente, si L, M y N, son puntos de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para el cual vale la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.

Sean AP, BQ y CR las perpendiculares de A, B y C res-

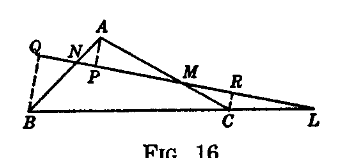


FIG. 16

pectivamente, a la línea LMN. Entonces por triángulos semejantes

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AP}{QB}, \frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR}, \quad \text{y} \quad \frac{CM}{MA} = \frac{RC}{AP}.$$

Multiplicando, tenemos

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

El inverso puede ser probado haciendo que MN corte a BC en L' y luego mostrando como se hizo en la Sección 3-2 que L coincide con L'.

3.5 Forma trigonométrica del Teorema de Menelao.

TEOREMA: *Si la hipótesis del Teorema de Menelao se satisface, entonces*

$$\frac{\operatorname{sen} ACN}{\operatorname{sen} NCB} \cdot \frac{\operatorname{sen} BAL}{\operatorname{sen} LAC} \cdot \frac{\operatorname{sen} CBM}{\operatorname{sen} MBA} = -1;$$

e inversamente, si L, M y N son puntos en los lados BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, para los cuales vale la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.

Las pruebas son tan parecidas a las de la forma trigonométrica del Teorema de Ceva, que no se darán aquí. El lector deberá hacer ambas pruebas.

3.6 Teorema de división interna y externa.

TEOREMA: *Si L, M y N son puntos cualesquiera en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC tales que AL, BM y CN son concurrentes, y si la línea MN interseca BC en L′, entonces los puntos L y L′ dividen el segmento BC interna y externamente en la misma razón.*

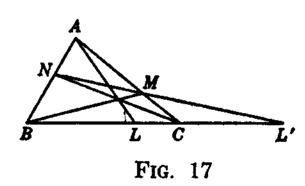


FIG. 17

Ya que AL, BM y CN son concurrentes tenemos por el Teorema de Ceva

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA} = 1.$$

Y puesto que L' M y N son colineales, por el Teorema de Menelao

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA} = -1,$$

de lo que obtenemos $\frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}$. De aquí se ve que L y L' dividen a BC interna y externamente en la misma razón.

En la Fig. 17 los tres puntos B, L y C están dados; el punto L' está determinado de manera única, ya que hay un solo punto que divide el segmento externamente en la misma razón numérica en la que un punto dado divide el segmento internamente. Así podemos concluir lo siguiente:

Sean B, L y C tres puntos fijos en una línea. Si A es un punto cualquiera fuera de esta línea, y M y N son puntos cualesquiera en los lados CA y AB del triángulo ABC de tal forma que AL, BM, y CN sean concurrentes, entonces la línea MN intersecará la línea BC en un punto fijo.

EJERCICIOS

1. Demostrar por medio de los teoremas de este capítulo que, en cualquier triángulo:
   (*a*) Las medianas son concurrentes.
   (*b*) Las alturas son concurrentes.
   (*c*) Las bisectrices de los ángulos interiores son concurrentes.
   (*d*) Las bisectrices de dos ángulos exteriores y la del tercero interior, son concurrentes.
   (*e*) Las bisectrices de los ángulos exteriores, intersecan los lados opuestos en tres puntos colineales.

2. Los seis centros de similitud de tres circunferencias, tomadas por parejas, están por tercias en cuatro líneas rectas.

3. Las seis bisectrices de los ángulos exteriores e interiores de un triángulo, pasan por tercias por cuatro puntos.

4. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se intersecan en O, entonces AO es una mediana.

5. Dado un segmento de línea AB y su punto medio. Dibujar por un punto dado P, con regla solamente, una línea paralela a AB.

6. Dadas dos líneas paralelas y el segmento AB en una de ellas. Encontrar el punto medio de AB, usando unicamente regla.

7. En la figura del Teorema de Ceva, demostrar que

$$\frac{OL}{AL}+\frac{OM}{BM}+\frac{ON}{CN}=1.$$

8. Si P es el punto medio del lado BC del triángulo ABC, y Q y R son puntos cualesquiera en AC y AB de tal forma que BQ y CR se corten en AP, entonces QR es paralelo a BC.

9. Si la circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en P, Q y R respectivamente, las líneas AP, BQ y CR, son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el *punto Gergonne* del triángulo.

10. Si una circunferencia corta los lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos P, P'; Q, Q'; R, R', respectivamente, y si AP, BQ y CR, son concurrentes, entonces AP' BQ' y CR', son concurrentes.

11. Si P, Q y R son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, de tal forma que AP, BQ y CR son concurrentes, y si QR, RP, PQ cortan a BC, CA y AB en P', Q', R' respectivamente, entonces P', Q' y R' son colineales.

12. En el ejercicio anterior, AP, BQ' y CR' son concurrentes.

13. Si los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero $ABCD$ son cortados por una línea recta en los puntos P, Q, R y S respectivamente, entonces

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

14. Sean L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, y sean D, E, F tres puntos cualesquiera en estos

lados para los cuales AD, BE y CF son concurrentes. Si P, Q, R son los puntos medios de AD, BE, CF respectivamente, demostrar que PL, QM, RN son concurrentes.

15. Si en el ejercicio anterior, X, Y, Z, son los puntos medios de EF, FD, DE respectivamente, demostrar que AX, BY, CZ son concurrentes; y también que LX, MY, NZ son concurrentes.

3.7 Figuras en perspectiva. Se dice que dos figuras están en *perspectiva,* si todas las líneas que unen puntos correspondientes de las dos figuras, son concurrentes. El punto por el cual pasan estas líneas es llamado el *centro de perspectiva.*

Las figuras homotéticas están en perspectiva (Sección 2.2), pero las figuras en perspectiva, no necesariamente son homotéticas, puesto que líneas correspondientes de figuras en perspectiva, no son paralelas en general.

3.8 Teorema de Desargues.

TEOREMA: *Si dos triángulos están en perspectiva, los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales; e inversamente, si los puntos de intersección de lados correspondientes de dos triángulos son colineales, los triángulos están en perspectiva.*

Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ en perspectiva, con O como centro de perspectiva, y hagamos que AB y $A'B'$ se corten en P, BC y $B'C'$ en Q y CA y $C'A'$ en R. Si aplicamos el Teorema de Menelao al triángulo ABO con $B'A'P$ como transversal, obtenemos

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1.$$

Análogamente, del triángulo BCO, con $B'C'Q$ como transversal, se sigue que

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1,$$

y del triángulo CAO con $A'C'R$ como transversal que

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1.$$

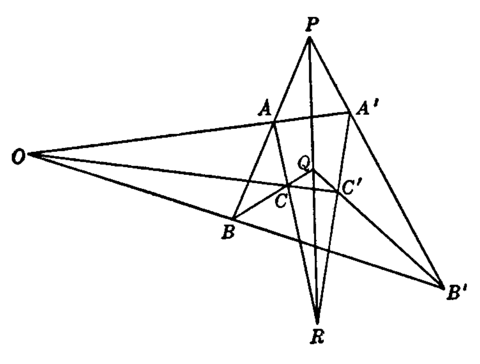


FIG. 18

El producto de estas tres ecuaciones nos da

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1,$$

que demuestra que P, Q y R son colineales.

Ahora, sean dados P, Q y R colineales, y consideremos los triángulos $AA'R$ y $BB'Q$. Estos triángulos están en perspectiva con P como centro de perspectiva. Más aún O, C y C' son los puntos de intersección de sus pares de lados correspondientes. Entonces estos tres puntos son colineales; es decir, la línea CC' pasa por el punto de intersección de AA' y BB'. Esto establece el inverso.

La línea en que están P, Q y R es el *eje de perspectiva* de los triángulos ABC y $A'B'C'$.

3.9 Importancia del Teorema de Desargues. Las propiedades de las figuras geométricas pueden ser clasificadas como *métricas* y *proyectivas*. Expresado toscamente, aquellas propiedades que están necesariamente relacionadas, ya sea directa o implícitamente, a la noción de medida, son propiedades métricas, mientras que aquellas que están esencialmente desconectadas de la medida son propiedades proyectivas. Ejemplos de las primeras son: la igualdad de segmentos de línea, la semejanza de triángulos, el antiparalelismo de líneas, y como ejemplo de las últimas son la concurrencia de líneas y la colinealidad de puntos. La geometría proyectiva es un estudio de las propiedades proyectivas de una configuración. *

* Para una discusión más completa de la diferencia entre propiedades métricas y proyectivas, ver, Graustein, *Introduction to Higher Geometry*, The Macmillan Co. Págs. 17-19.

Lo establecido por el Teorema de Desargues, implica sólo propiedades proyectivas de las figuras a las que se aplica. Y como esto está tan relacionado con las ideas de concurrencia y colinealidad, y tales ideas son básicas en la geometría proyectiva, este teorema es uno de los más importantes en este campo. De hecho algunas veces se le toma como el teorema fundamental de la geometría proyectiva.

Es de notarse que, aunque la demostración dada tiene carácter métrico, es posible dar una demostración que sea completamente de carácter no-métrico. Tal demostración es deseable para el desarrollo de la geometría proyectiva, pero desde nuestro punto de vista es interesante ver cómo se puede demostrar ese teorema, tan importante, basándose en el Teorema de Menelao.

EJERCICIOS

1. ¿Qué línea es el eje de perspectiva de triángulos homotéticos?

2. Refiera la solución del siguiente problema al Teorema de Desargues: Dadas dos líneas rectas y un punto que no se encuentre en ambas. Con regla solamente, trazar una línea a través del punto dado y del punto de intersección de las dos líneas dadas sin usar este punto de intersección.

3. Si tres triángulos tienen un centro común de perspectiva, los tres ejes de perspectiva son concurrentes.

4. Si tres triángulos están en perspectiva por pares y los pares tienen un eje común de perspectiva, los centros de perspectiva son colineales.

5. Si las líneas AA', BB', CC', son concurrentes, los seis puntos de intersección de los pares de líneas AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; $A'B$, AB'; $B'C$, BC' y $C'A$, CA' se encuentran por tercias en cuatro líneas rectas.

6. Verificar que, en la configuración del Teorema de Desargues (Fig. 18), hay diez líneas y diez puntos, tales que tres de ellos están en cada línea, y tres líneas pasan a través de cada punto. Mostrar que en esta figura hay diez pares de triángulos en perspectiva.

7. Mostrar que siempre es posible trazar un triángulo que esté en perspectiva con un triángulo dado y que sea semejante a otro triángulo dado.

CAPITULO 4

PUNTOS Y LINEAS ARMONICOS

4.1 División armónica. Se dice que el segmento de línea AB está *dividido armónicamente* por C y D si $AC : CB = -AD : DB$. Cuando AB está dividido así, los puntos C y D son *conjugados armónicos* con respecto a A y B. Esta definición de división armónica es equivalente a lo siguiente: Se dice que dos puntos dividen un segmento de línea armónicamente si lo dividen interna y externamente en la misma razón.

Ya nos hemos encontrado, en nuestro trabajo anterior, con ilustraciones de tal división. Por ejemplo, las bisectrices de un ángulo interior y su correspondiente ángulo exterior, de un triángulo, dividen al lado opuesto armónicamente. Así también los centros de similitud de dos circunferencias son conjugados armónicos con respecto a los centros de las circunferencias.

4.2 La naturaleza recíproca de la división armónica. De la proporción

$$AC : CB = -AD : DB$$

se sigue que

$$CA : AD = -CB : BD.$$

De aquí, si C y D dividen el segmento AB armónicamente, entonces también A y B dividen el segmento CD armónicamente. Esto es equivalente a el

TEOREMA: *Si C y D son conjugados armónicos con respecto a A y B, entonces A y B son conjugados armónicos con respecto a C y D.*

Cuando cuatro puntos A, B, C, D en una línea, están en tal forma que cada uno de los pares A, B: C, D son conjugados armónicos con respecto al otro par, se dice que constituyen

una hilera armónica; también se dice que son cuatro puntos armónicos.

Si dos de cuatro puntos armónicos coinciden, es obvio que un tercero coincide con ellos.

4.3 Construcción de conjugados armónicos. Hay varias maneras de construir D, el conjugado armónico de C con respecto a A y B. Aquí se da, una sencilla. Otras se entreverán más adelante en este capítulo.

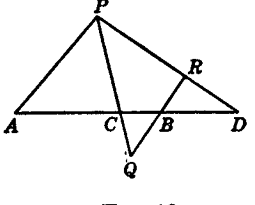


FIG. 19

Por A y B dibujemos dos líneas paralelas cualesquiera, y por C dibujemos una línea que interseque estas paralelas en P y Q respectivamente. En QB, tomemos R tal que $QB = BR$. Entonces la línea PR interseca a AB en el punto deseado D. Porque, para los triángulos semejantes APC y BQC.

$$AC : CB = AP : QB;$$

y por la semejanza de los triángulos APD y BRD,

$$AD : DB = -AP : BR.$$

Y ya que $QB = BR$, se sigue que

$$AC : CB = -AD : DB.$$

La construcción anterior muestra que, cuando tres puntos están en una línea recta, el conjugado armónico de uno de ellos con respecto a los otros dos, siempre existe y es obvio que es único. En el caso especial en que C es el punto medio del segmento AB, D es el punto al infinito en la línea AB.

Debe notarse, cuidadosamente, que en la notación aquí adoptada, cuando A, B, C, D, son cuatro puntos armónicos, los pares conjugados son A,B y C,D. Más aún, uno y sólo uno de cada par está en el segmento determinado por los otros dos.

4.4 Propiedades de los puntos armónicos. Si A, B, C, D son cuatro puntos armónicos:

(*a*) Cada una de las otras siete permutaciones de estos puntos en las cuales los pares conjugados se conservan, es armónica;

(*b*) Los segmentos AC, AB y AD están en progresión armónica, esto es

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD},$$

e inversamente;

(*c*) $\overline{OB}^2 = OC \cdot OD$, donde O es el punto medio de AB, e inversamente.

La prueba de (*a*) es una consecuencia inmediata de la definición de la Sección 4.1. Las siete permutaciones son: A, B, D, C; B, A, C, D; B, A, D, C; C, D, A, B; C, D, B, A; D, C, A, B y D, C, B, A.

Prueba de (*b*): De la proporción

$$AC : CB = -AD : DB$$

obtenemos

$$\frac{CB}{AB \cdot AC} = \frac{BD}{AB \cdot AD};$$

de donde

$$\frac{AB - AC}{AB \cdot AC} = \frac{AD - AB}{AB \cdot AD},$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD},$$

de lo cual

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Siguiendo los pasos del argumento en sentido contrario, tenemos la prueba del inverso. La relación de los segmentos AC, AB y AD, puede ser también expresada diciendo que AB es la *media armónica* de AC y AD.

Prueba de (*c*): Escribiendo las relaciones de los segmentos de línea involucrados (Fig. 20), y sustituyendo AO por OB, vemos que la proporción

$$AC : CB = -AD : DB$$

es equivalente a

$$\frac{OB + OC}{OB - OC} = \frac{OD + OB}{OD - OB}$$

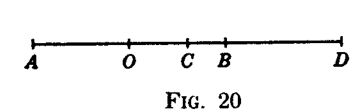


FIG. 20

y lo último es equivalente a $OB : OC = OD : OB$ que nos da $\overline{OB}^2 = OC \cdot OD$.

El inverso es obvio.

4.5 Líneas armónicas. Se dice que las líneas OA y OB están *separadas armónicamente* por las líneas OC y OD, siendo O cualquier punto finito en el plano, si

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} COB} = -\frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} DOB}.$$

cuando cuatro líneas de un haz están relacionadas como está expresado en la definición de arriba, OC y OD son *conjugados armónicos* con respecto a OA y OB.

De la definición dada arriba, se sigue que, si OA y OB están separadas armónicamente por OC y OD, entonces OC y OD están separados armónicamente por OA y OB. Así tenemos el

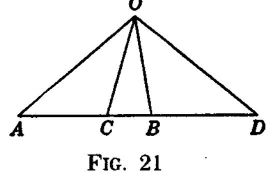


FIG. 21

TEOREMA: *Si cuatro líneas de un haz están en tal forma que un par es conjugado armónico con respecto al segundo par, entonces el segundo par es conjugado armónico con respecto al primero.*

Tal haz de cuatro líneas es llamado *haz armónico,* y sus líneas son llamadas cuatro líneas armónicas. Aquí también, como con cuatro puntos armónicos, si dos líneas de un haz armónico coinciden, una tercera coincide con ellas.

La existencia de una cuarta única línea, cuando tres líneas de un haz están dadas, se demuestra fácilmente.

4.6 Transversal de un haz armónico.

TEOREMA: *La hilera de puntos en que las líneas de un haz armónico cortan cualquier línea que no pase por el vértice del haz, es una hilera armónica; e inversamente el haz de líneas obtenido uniendo cuatro puntos armónicos con cualquier punto que no esté en esa línea es un haz armónico.*

Si los miembros de la ecuación

$$\frac{\text{sen } AOC}{\text{sen } COB} = -\frac{\text{sen } AOD}{\text{sen } DOB}$$

se multiplican por OA/BO, la ecuación resultante puede reducirse, por medio del teorema de la Sección 1.5, a $AC : CB = -AD : DB$.

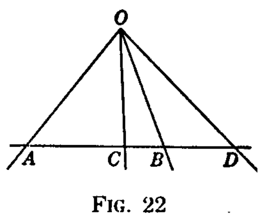


FIG. 22

Inversamente podemos empezar con la última de las ecuaciones anteriores y obtener la primera.

De este teorema obtenemos inmediatamente el útil

COROLARIO: *Si un haz de cuatro líneas es cortado por una transversal en una hilera armónica de puntos, entonces cualquier otra transversal del haz también corta sus líneas en una hilera armónica de puntos.*

4.7 Hileras armónicas en perspectiva.

TEOREMA: *Si las hileras armónicas A, B, C, D y A, B', C', D' están en líneas distintas, entonces (1) BB', CC' y DD' son concurrentes, y (2) BB', $C'D$ y CD' son concurrentes.*

Para probar (1), supongamos que BB' y CC' se intersecan en O. Dibújese OA; trácese OD, intersecando a AB' en D''. Entonces, por el corolario de la últ ma sección, A, B', C', D'' son armónicos. De aquí, por la propiedad de unicidad, D'' coincide con D'. La segunda parte se prueba de una manera semejante, notando que A, B', D', C', es una de las permutaciones armónicas de A, B', C', D'.

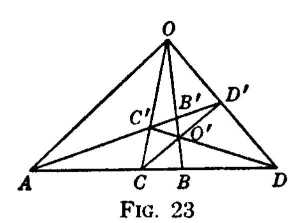


FIG. 23

4.8 Líneas conjugadas perpendiculares.

TEOREMA: *Si en un haz armónico de líneas diferentes, un par de líneas conjuqadas es perpendicular, una a otra, entonces estas líneas bisecan los ángulos formados por las otras dos, e inversamente si en un haz de cuatro líneas distintas uno de los pares biseca los ángulos formados por el otro par, el haz es armónico.*

En el haz armónico $O(ABCD)$,* OC es perpendicular a OD (Fig. 24). Hagamos que la paralela transversal a OD corte a OA, OB y OC en A', B' y C' respectivamente. Entonces el conjugado de C' con respecto a A' y B' es el punto al infinito en esta transversal y consecuentemente C' es el punto medio de $A'B'$ (Sección 4.3) de aquí que los triángulos rectángulos $A'C'O$ y $OC'B'$ son congruentes, y OC biseque el ángulo AOB. Se infiere de inmediato que OD biseca el ángulo BOA''.

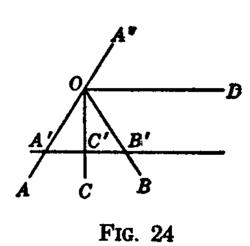


FIG. 24

Para la parte inversa del teorema, hagamos que OC y OD sean las bisectrices de los ángulos formados por las líneas OA y OB. Entonces sen AOC = sen COB; así también sen AOD = − sen DOB, ya que el ángulo AOD es el suplemento del ángulo DOA'' que es igual al negativo del ángulo DOB. De estas igualdades se obtiene la conclusión.

4.9 Curvas ortogonales. El *ángulo de intersección* de dos curvas en un punto que ellas tengan en común es el ángulo entre las tangentes a las curvas en el punto común. Dos curvas se dice que son *ortogonales* si su ángulo de intersección es un ángulo recto.

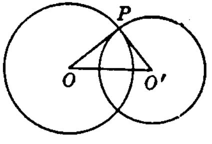


FIG. 25

Los siguientes hechos concernientes a circunferencias son obvios.

(1) Si dos circunferencias se intersecan, los ángulos de intersección en sus puntos comunes son iguales.

(2) Si dos circunferencias son ortogonales, una tangente a una de ellas en el punto de intersección pasa por el centro de la otra; y si el radio de una de las circunferencias trazado a un punto común es tangente a la otra las circunferencias son ortogonales.

(3) El cuadrado de la distancia entre los centros de dos circunferencias ortogonales es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

4.10 Una propiedad armónica en relación con circunferencias ortogonales. Consideremos una circunferencia con

* El símbolo $O(ABCD)$ se entenderá que significa el haz cuyas líneas son OA, OB, OC y OD.

diámetro AB, y hagamos que una segunda circunferencia corte la línea de este diámetro en C y D, un par de armónicos conjugados con respecto a A y B. Entonces las dos circunferencias son ortogonales. Dejamos que P sea el punto de intersección de las dos circunferencias y OP el radio de la primera circunferencia trazado a P. Puesto que $\overline{OB}^2 = OC \cdot OD$ (Sección 4.4), tenemos también $\overline{OP}^2 = OC \cdot OD$, de lo que se sigue que OP es tangente a la segunda circunferencia y de aquí que las circunferencias sean ortogonales.

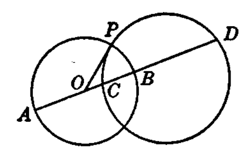


FIG. 26

También se obtiene la propiedad inversa. Suponiendo que las dos circunferencias sean ortogonales, y que el diámetro de la primera interseca ambas en A, B y C, D respectivamente. Entonces (Fig. 26)

$$\overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 = OC \cdot OD.$$

Entonces A, B, C y D son cuatro puntos armónicos.

Estos resultados pueden ser combinados en el

TEOREMA: *Si se construye una circunferencia con diámetro AB, es ortogonal a cualquier círculo que pase por C y D, un par de conjugados armónicos de A y B; e inversamente, si dos circunferencias ortogonales son cortadas por una línea que pasa por el centro de una de ellas, los cuatro puntos de intersección constituyen una hilera armónica.*

EJERCICIOS

1. Si A, B, C, D son cuatro puntos armónicos y O y O' son los puntos medios de AB y CD respectivamente, entonces $\overline{OB}^2 + \overline{O'C}^2 = \overline{OO'}^2$.

2. Si A y A' dividen armónicamente un diámetro de una circunferencia, y B y B' dividen armónicamente un segundo diámetro, entonces AB y $A'B'$ son antiparalelos con respecto a los dos diámetros, ¿Son también antiparalelas AB' y $A'B$?

3. Las líneas que unen cualquier punto de una circunferencia a los vértices de un cuadrado inscrito, forman un haz armónico.

4. Si A, B, C, D son cuatro puntos armónicos y si AL y AM son la media aritmética y geométrica de AC y AD respectivamente entonces AM es la media proporcional a AL y AB; es decir, las medias

aritméticas, geométricas y armónicas de dos segmentos de línea, están en progresión geométrica.

5. Si L, M, N son los puntos medios de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, el haz $L\ (MNAB)$ es armónico.

6. Si AP, BQ, CR son las alturas del triángulo ABC, el haz $P(QRAB)$ es armónico.

7. A y B dos puntos cualesquiera en una circunferencia, son unidos a otros cuatro puntos cualesquiera también en la circunferencia El haz cuyo centro es A, es armónico si y sólo si el haz con centro en B es armónico.

8. Establezca y pruebe teoremas correspondientes al ejercicio anterior, si

(*a*) Uno de los cuatro puntos es A.

(*b*) Uno de los cuatro puntos es A y otro es B.

9. La bisectriz del ángulo A del triángulo ABC corta el lado opuesto en P. Q y R son los pies de las perpendiculares desde B y C sobre AP. Demostrar que los cuatro puntos A, P, Q, R son armónicos.

10. Demostrar que el conjugado armónico de C con respecto a A y B, puede ser localizado como sigue: colocando un punto P tal que el ángulo formado por PA y PB sea bisecado por PC. Por P dibujamos la perpendicular a PC, cortando a AB en D.

11. O es un punto cualquiera de la altura AD del triángulo ABC. BO y CO intersecan a AC y AB en E y F respectivamente. Probar que el ángulo EDF es bisecado por DA.

12. A, B, C, D son cuatro puntos en una línea recta. Encontrar dos puntos P y Q, tales que sean conjugados armónicos con respecto a A y B, así como con respecto a C y D. Discuta ampliamente los casos.

13. P y Q son los centros de dos circunferencias que tienen tangentes exteriores comunes que se intersecan en R y tangentes interiores comunes que se intersecan en S. Demostrar que existen circunferencias con centros R y S cuyas tangentes comunes exteriores, se intersecan en P y cuyas tangentes comunes interiores se intersecan en Q.

14. Suponga que en la Sección 4.5, O es un punto al infinito. Formule una definición de haz armónico con O como centro, y dé la discusión de esta sección, para este caso.

15. Las tangentes a una circunferencia en P y Q se intersecan en A, y la línea de diámetro BC pasa por A. Demostrar que A y Q están separados armónicamente por los puntos en los cuales su línea es intersecada por PB y PC.

16. ¿Qué especialización de la figura del Ejercicio 15 resultará cuando uno de los puntos que separan a A y Q es ideal?

4.11 Cuadrángulos completos. Un triángulo consiste de tres puntos no colineales y de tres segmentos de línea que unen estos tres puntos por pares. Así también un cuadrángulo consiste de cuatro puntos, que tomados por tercias son no colineales, y de cuatro segmentos que los unen

Estas figuras pueden ser generalizadas formando en cada caso la figura que consiste de los puntos y *todas* las líneas (completas) que ellos determinan por pares. Tal generalización del triángulo fue sugerida en el segundo parágrafo de la Sección 3.1.

La figura que consiste de cuatro puntos, cualesquiera tres no alineados, y de seis líneas determinadas por esos puntos, es un *cuadrángulo completo*. Los cuatro puntos son sus *vértices*, y las seis líneas son sus *lados*. Se dice de dos lados que son *lados opuestos*, si no tienen un vértice común. En un cuadrángulo completo hay tres pares de lados opuestos.

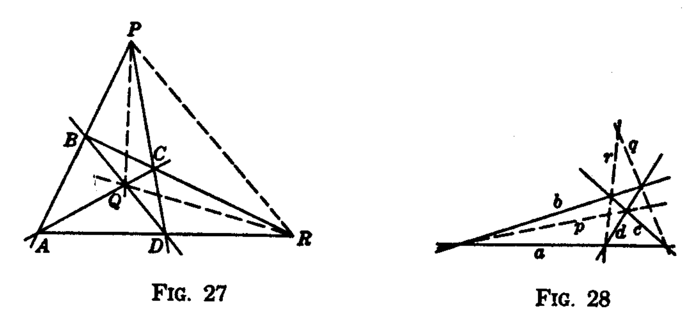


FIG. 27 FIG. 28

Los tres puntos determinados por los lados opuestos de un cuadrángulo completo, son sus *puntos diagonales*, y el triángulo determinado por estos tres puntos es el *triángulo diagonal*.

En la Fig. 27, *PQR* es el triángulo diagonal del cuadrángulo completo *ABCD*. Esta figura deberá ser cuidadosamente estudiada con referencia a todas las definiciones dadas.

4.12 Cuadrilátero completo. La figura que consiste de cuatro líneas, tres de las cuales no pasan por el mismo punto y los seis puntos determinados por la intersección de estas líneas, es un *cuadrilátero completo*. Las cuatro líneas son sus *lados* y los seis puntos son sus *vértices*. Se dice de dos vértices que son *vértices opuestos* si ellos no están en el mismo lado. En un cuadrilátero completo hay tres pares de vértices opuestos.

Las tres líneas determinadas por los pares de vértices opuestos de un cuadrilátero completo, son sus *diagonales*, y

el triángulo determinado por estas tres líneas, es su *triángulo diagonal.*

Las definiciones anteriores están ilustradas en la Fig. 28. En esta figura, pqr es el triángulo diagonal del cuadrilátero completo cuyos lados son las líneas a, b, c, d.

4.13 Principio de dualidad. En las definiciones de cuadrángulo completo y cuadrilátero completo se observa que si las palabras "punto" y "recta" son intercambiadas, y si además son hechas pequeñas modificaciones al lenguaje, cada una de éstas se convierte en la otra. Esta es una ilustración del *principio de dualidad.* Su importancia está en el hecho de que cuando es aplicado a cualquier enunciado o teorema de naturaleza proyectiva, se llega a un segundo enunciado o teorema llamado el dual del primero, y se puede probar que el dual de un teorema es verdad, si el teorema dado es verdadero. Los siguientes ejemplos dan más claridad en sus aplicaciones y utilidad.

(a) **Dos puntos determinan una línea.**

(a') **Dos rectas determinan un punto.**

(b) **Tres puntos en un plano dado, o están alineados, o determinan un triángulo.**

(b') **Tres rectas en un plano dado, o pasan por un punto, o determinan un trilátero.** *

(c) Un haz de rectas consiste en líneas que pasan todas ellas por un mismo punto.

(c') **Una hilera de puntos, consiste en puntos que están todos en una línea.**

4.14 Propiedades armónicas de cuadrángulos y cuadriláteros. Importantes propiedades de los cuadrángulos y cuadriláteros completos están contenidas en los siguientes teoremas duales.

TEOREMA: *En cada diagonal de un cuadrilátero completo, hay una hilera armónica que consiste de los dos vértices en la diagonal y los puntos en los cuales es intersecada por las otras dos.*

---

* Un *trilátero* es una figura que consiste en tres líneas no concurrentes y los tres puntos que ellas determinan. Es el dual de un triángulo, que consiste en tres puntos no colineales y las tres líneas que determinan. La figura de un triángulo es también una figura trilateral.

TEOREMA: *Por cada punto diagonal, de un cuadrángulo completo, pasan cuatro líneas armónicas, que son los dos lados que pasan por el punto y las líneas que lo unen con los otros dos puntos diagonales.*

En el cuadrilátero completo (Fig. 29) de lados AB, BC, CD y DA cuyo triángulo diagonal es PQR, deseamos probar que $BDQR$ es una hilera armónica. Consideremos el triángulo ABD con líneas AQ, BE y DF concurrentes en C. La transversal FE interseca BD en R, y por el teorema de la

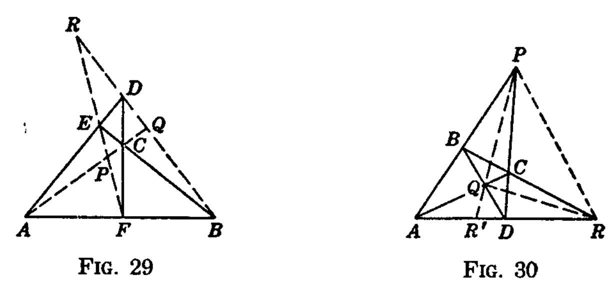


FIG. 29 FIG. 30

Sección 3.6, Q y R dividen BD interna y externamente en la misma razón. Así la hilera $BDQR$ es armónica. De manera análoga se prueba que $FEPR$ y $ACPQ$ son armónicos.

Para probar el segundo teorema, consideremos el cuadrángulo completo $ABCD$ (Fig. 30). Si PQ interseca a AD en R', entonces por la Sección 3.6, $ADR'R$ es una hilera armónica. Así $P(ADR'R)$ es un haz de líneas armónicas. Análogamente, los haces con Q y R como centro son armónicos.

4.15 Cuadrángulos y cuadriláteros con triángulo diagonal común. Siempre podemos obtener un cuadrángulo completo que tenga el mismo triángulo diagonal que un cuadrilátero completo dado. Una manera de hacer esto es, unir cada punto de intersección de dos diagonales del cuadrilátero a los dos vértices de este último que estén en la otra diagonal. Por las propiedades armónicas se sigue que las seis líneas así dibujadas pasan por tercias por cuatro puntos y que son por lo tanto los seis lados de un cuadrángulo completo. El cuadrángulo así obtenido tiene triángulo diagonal en común con el cuadrilátero dado. Un resultado similar puede obtenerse si empezamos con un cuadrilátero completo y aplicamos el principio de dualidad paso por paso en el procedimiento anterior.

Por cada vértice del cuadrilátero pasa un lado del cuadrángulo. Cada vértice del cuadrángulo es un centro de perspectiva, y correspondiendo a él hay una línea del cuadrilátero que es el eje de perspectiva para el triángulo diagonal, el triángulo cuyos vértices son los vértices restantes del cuadrángulo, y el triángulo cuyos lados son los lados restantes del cuadrilátero.

EJERCICIOS

1. Usando los teoremas que se refieren a hileras en perspectiva probar en la Fig. 29, que $FEPR$ y $ACPQ$ son hileras armónicas.

2. Tres puntos distintos están uno en cada lado de un triángulo. Sus conjugados armónicos con respecto a los vértices del triángulo, están unidos a los vértices opuestos. Las tres líneas así obtenidas son concurrentes si y sólo si lo tres puntos son colineales.

3. Construya un cuadrilátero completo que tenga un triángulo diagonal dado. ¿Pueden ser dibujados más de uno tales cuadriláteros?

4. Examine el Teorema de Desargues de la Sección 3.8 con respecto al principio de dualidad.

5. Probar en la Fig. 30, que $PA \cdot PC \cdot RB \cdot RD = RA \cdot RC \cdot PB \cdot PD$.

6. ¿Pueden los puntos diagonales de un cuadrángulo completo ser colineales?

7. Demuestre que los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero completo son colineales.

Sugerencia: En la figura, P, R y Q, son los puntos medios de las diagonales AB, CD, EF. Sean L, M y N los puntos medios de los lados del triángulo CEB. Entonces M, N y P son colineales, así como M, L, Q y N, L, R.

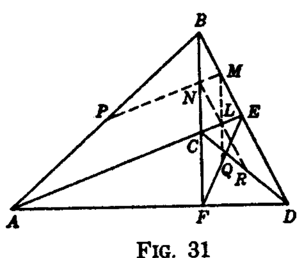


Fig. 31

Observe que $MP : PN = EA : AC$, etcétera, y que A, F y D son puntos colineales de los lados del triángulo ECB. Haga uso del Teorema de Menelao.

8. Si dos cuadrángulos completos están en tal forma que los puntos de intersección de cinco pares de lados correspondientes están en una línea recta, entonces el punto en el cual el sexto par de lados se interseca, también está en esa línea, y las cuatro líneas que unen vértices correspondientes son concurrentes.

9. Enuncie el dual del Ejercicio 8, y dibuje una figura para ilustrarlo.

10. Cada uno de los triángulos cuyos lados son tres de las cuatro líneas de un cuadrilátero completo, está en perspectiva con el triángulo diagonal del cuadrilátero.

11. Dé los detalles de la prueba de la Sección 4.15 de que seis líneas pasan por tercias por cuatro puntos.

12. Dibuje una figura para ilustrar la Sección 4.15 y señale los cuatro conjuntos de triángulos en perspectiva con sus centros y ejes de perspectiva para cada conjunto.

13. Los vértices de un cuadrángulo completo son los tres vértices de un triángulo y el punto de intersección de sus medianas. Construya su triángulo diagonal. También construya un cuadrilátero completo que tenga su mismo triángulo diagonal.

14. Construya un cuadrilátero completo:

(*a*) Uno y sólo uno de cuyos vértices es un punto ideal.

(*b*) Dos de cuyos vértices son puntos ideales.

(*c*) Cuyo triángulo diagonal tiene uno y sólo un vértice ideal.

(*d*) Cuyo triángulo diagonal tiene dos vértices ideales.

15. $ABCD$ es un cuadrángulo completo cuyos puntos diagonales P, Q, R están en AB, AC, AD respectivamente. AC y BD cortan a PR en E y F; BC y AD cortan a PQ en G y H; y AB y CD cortan a QR en L y K. Mostrar la colinealidad de los siguientes conjuntos de puntos: L, E, G; H, K, E; G, K, F, y L, H, F. Cuando dibuje las cuatro líneas por estos puntos, encuentre en la figura otros cinco cuadrángulos completos y sus triángulos diagonales.

CAPITULO 5

EL TRIANGULO

5.1 **Puntos importantes asociados.** Este capítulo será dedicado al estudio del triángulo y otras figuras que están íntimamente relacionadas con él. Empezaremos por señalar algunos de los puntos importantes asociados al triángulo. La existencia de cada uno de los cuales es demostrada en geometría elemental.

(*a*) El *circuncentro*, es el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. Es el centro de la circunferencia circunscrita (también llamada circuncírculo).

(*b*) El *incentro*, es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo. Es el centro de la circunferencia inscrita (también llamado incírculo).

(*c*) Los *excentros*, de los cuales hay tres que son cada uno de los puntos de intersección de la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores de los otros dos vértices. Son los centros de las circunferencias excritas (también llamados excírculos).

(*d*) El *ortocentro*, es el punto de intersección de las alturas.

(*e*) El *centroide* o *punto mediano*, es el punto de intersección de las medianas.

Hasta donde sea conveniente hacerlo, será llevada a lo largo de este capítulo una notación standard. Por ejemplo, A, B, C, serán usadas para señalar los vértices del triángulo; D, E, F, los pies de las alturas desde estos vértices respectivamente, y L, M, N, los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Notaciones standard posteriores irán apareciendo conforme sean introducidas.

5.2 Triángulo pedal. El triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo es llamado el *triángulo pedal* del triángulo dado. En la figura anexa, DEF es el triángulo pedal de ABC.

Si en la Fig. 32 se dibuja una circunferencia de diámetro AB, ésta pasará por D y E. Así los ángulos EDA y EBA, son iguales. De la misma manera, los ángulos ADF y ACF son iguales. También, por triángulos semejantes, el ángulo EBA, es igual al ángulo ACF de lo cual se sigue que DA es la bisectriz del ángulo EDF.

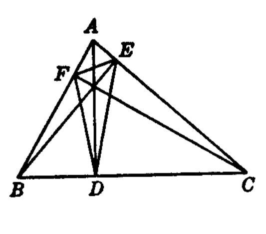


Fig. 32

Más aún, ya que el cuadrilátero $ABDE$ es inscriptible, AB y DE son antiparalelos con respecto a AC y BC.

Así, (1) las alturas de un triángulo son las bisectrices de los ángulos del triángulo pedal; y (2) cada lado de un triángulo es con respecto a las líneas de los otros dos lados, antiparalela a aquel lado del triángulo pedal cuyas extremidades están en estos lados.

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de los puntos asociados de la Sección 5.1 están siempre dentro del triángulo? ¿Cuáles están fuera siempre? Discuta ampliamente las varias posiciones posibles de aquellos puntos que no están siempre adentro ni siempre afuera.
2. Probar que el punto mediano de un triángulo es un punto de trisección de cada mediana.
3. Si A, B y H son tres puntos distintos que no están en línea recta, existe un punto C, tal que H es el ortocentro del triángulo ABC.
4. Un triángulo puede ser construido, teniendo dos de sus vértices y un tercer punto no alineado con los dos anteriores como centroide.
5. Formule y pruebe un enunciado que se refiera al circuncentro, al incentro y a los excentros, como sugieren los dos ejercicios inmediatos anteriores.
6. Construya un triángulo con tres segmentos de línea dados, como medianas.
7. El ángulo formado por una línea del vértice de un triángulo al circuncentro y la altura por ese vértice, es bisectado por la bisectriz del ángulo en ese vértice.
8. La suma de las medianas es mayor que los tres cuartos del perímetro y menor que el perímetro de un triángulo.

9. H es el ortocentro del triángulo ABC. La altura por A corta el lado opuesto en D y corta al circuncírculo en K. Demostrar que $HD = DK$.

10. El punto mediano de un triángulo está en la línea que une el ortocentro y el circuncentro y la divide en la razón 2 : 1.

11. Cualquier par de alturas de un triángulo es antiparalelo con respecto a las líneas de los lados a los cuales son trazadas.

5.3 Propiedades que se refieren al incírculo y a los excírculos.

TEOREMA: *El punto medio de un lado de un triángulo es también el punto medio del segmento determinado por los puntos de contacto de dicho lado con la circunferencia inscrita y la correspondiente excrita.*

En ésta y en las siguientes discusiones señalaremos los lados BC, CA y AB del triángulo ABC con a, b y c, respectivamente. También s nos representará $\frac{a+b+c}{2}$, el semiperímetro del triángulo. Entonces con notaciones como en la Fig. 33, se sigue que

$$AZ_1 = Y_1A;\ BZ_1 = BX_1;\ X_1C = Y_1C;$$

de aquí

$$AB + BX_1 = X_1C + CA = s,$$

y

$$BX_1 = s - c.$$

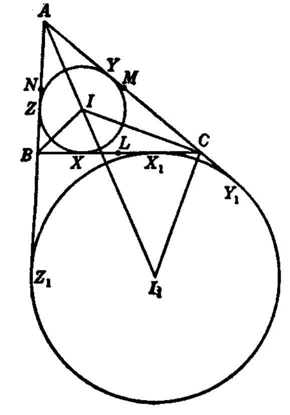


FIG. 33

También, puesto que

$$AB + XC = s,$$

$$XC = s - c,$$

y por lo tanto $BX_1 = XC$. Restando XX_1 tenemos $BX = X_1C$. Entonces el punto medio L de BC es también el punto medio de XX_1.

TEOREMA: *El área de un triángulo es igual al producto del semiperímetro y el radio del círculo inscrito; es también igual al producto del semiperímetro disminuido en un lado y el radio del excírculo correspondiente.*

En la Fig. 33, sean I e I_1 los centros y r y r_1 los radios del incírculo y del excírculo correspondientes al lado BC, respectivamente. El área del triángulo IBC es $\frac{1}{2}ar$; la del triángulo ICA es $\frac{1}{2}br$; y la del triángulo IAB es $\frac{1}{2}cr$. De donde

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, r(a + b + c) = rs,$$

donde Δ es el área del triángulo ABC.

También observando que Δ es la suma de las áreas de los triángulos I_1AB e I_1CA menos la del triángulo I_1CB, tenemos

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, r_1(b + c - a) = r_1(s - a).$$

Resultados similares se obtienen para cada uno de los otros excírculos.

Si llamáramos r_2 y r_3 a los radios de los otros dos excírculos, tenemos el

COROLARIO:
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

5.4 El cuadrángulo ortocéntrico. Las seis líneas que bisecan los ángulos interiores y exteriores de un triángulo, son concurrentes en cuatro puntos por tercias. Los cuatro puntos de concurrencia, I, I_1, I_2, I_3, son el incentro y los excentros del triángulo dado. El cuadrángulo completo determinado por ellas, tiene la propiedad de que cada uno de sus vértices es el ortocentro del triángulo determinado por los otros tres. Debido a esta propiedad es llamado el *cuadrángulo ortocéntrico del triángulo.* Cualquier conjunto de cuatro puntos que determina un cuadrángulo tal, es llamado un grupo *ortocéntrico de puntos,* y los cuatro triángulos que determinan tomando tres puntos a la vez, es llamado un *grupo ortocéntrico de triángulos.*

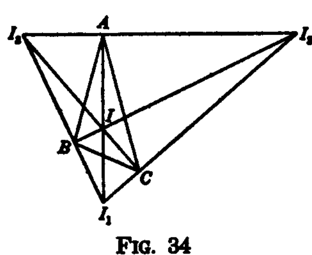


FIG. 34

El triángulo dado es obviamente el triángulo pedal de cada uno de los cuatro triángulos que están determinados por los vértices de su cuadrángulo ortocéntrico. Esto es, los cuatro triángulos de un grupo ortocéntrico tienen el mismo triángulo pedal.

EJERCICIOS

1. Demostrar que la suma de los recíprocos de las alturas de un triángulo es igual a la suma de los recíprocos de los radios de los excírculos.

2. Los exradios de un triángulo equilátero son iguales, y cada uno es tres veces el inradio.

3. Si el triángulo determinado por los excentros de un triángulo dado es isósceles, el triángulo dado es isósceles, e inversamente.

4. En la Fig. 33, demostrar que

(*a*) $$Y_1Y = ZZ_1 = a;$$

(*b*) $$XX_1 = b - c.$$

5. En cualquier triángulo, el producto de los dos segmentos en que es dividida la altura por el ortocentro, es el mismo para las tres alturas.

6. La longitud del segmento que une un vértice de un triángulo al ortocentro, es el doble de la perpendicular bajada del circuncentro al lado opuesto.

7. Las seis circunferencias cuyos diámetros son los segmentos que unen por pares los puntos de un grupo ortocéntrico de puntos, pasan de cuatro en cuatro por tres puntos.

8. Si A, B, C, D, son un grupo ortocéntrico de puntos, las circunferencias que tienen AB y CD como diámetros, son ortogonales.

9. Identifíquese el triángulo diagonal de un cuadrángulo ortocéntrico.

10. Las líneas que van de los vértices de un triángulo a los puntos de contacto de las circunferencias excritas con los lados opuestos son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el *punto de Nagel* del triángulo.

11. H y O son el ortocentro y el circuncentro del triangulo ABC y P y L son los puntos medios de AH y BC. Muéstrese que PO y AL se bisecan.

12. L, M, N son los puntos medios de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, respectivamente, y D es el pie de la altura que pasa por A. Muéstrese que los triángulos LMN y DMN son congruentes y que $DLMN$, es un trapecio.

5.5 La circunferencia de los nueve puntos.

TEOREMA: *Los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices al ortocentro de un triángulo cualquiera están en una circunferencia.*

Esta importante circunferencia es llamada la *circunferencia de los nueve puntos* del triángulo. En la Fig. 35, L, M, N son los puntos medios de los lados; D, E, F son los pies de las alturas y P, Q, R son los puntos medios de los segmentos que unen los vértices al ortocentro H del triángulo ABC.

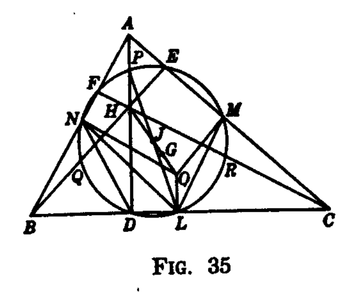


Fig. 35

Ahora ND y LM son cada uno iguales a la mitad de AB, y NM es paralela a BC. Así $DLMN$ es un trapecio, y la circunferencia determinada por los puntos medios de los lados pasa por D. También el cuadrilátero $PNDL$ es inscriptible, puesto que los ángulos PNL y PDL son ángulos rectos; entonces P está en la misma circunferencia que L, M, N y D. Análogamente puede probarse que E, F, Q, R también están en esa circunferencia.

5.6 Propiedades de la circunferencia de los nueve puntos. La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo tiene muchas propiedades interesantes e importantes, algunas de las cuales se dan aquí. Otras aparecerán en los ejercicios que siguen.

(*a*) La longitud del radio de la circunferencia de los nueve puntos es la mitad de la del radio del circuncírculo del triángulo. Esto se sigue del hecho de que el triángulo LMN es semejante al triángulo ABC, siendo la razón de semejanza de 1:2.

(*b*) El centro de la circunferencia de los nueve puntos, es el punto medio del segmento que une el ortocentro y el circuncentro. En la Fig. 35, sea O el circuncentro del triángulo dado. Se demostrará primero que $PH = OL$. Para esto observemos que P y O son los ortocentros de los triángulos congruentes ANM y LMN, y que en estos triángulos los lados correspondientes AP y OL son iguales. Pero $AP = PH$. Entonces PH es igual a OL, y puesto que son paralelos, $PHLO$ es un paralelogramo. Sea J el punto de intersección de sus diagonales. Entonces J es el punto medio de HO y PL. Pero el punto medio de PL es el

centro de los nueve puntos, puesto que PDL es un triángulo rectángulo inscrito.

(*c*) El centroide y el ortocentro del triángulo dado, son los centros homotéticos de la circunferencia de los nueve puntos y del circuncírculo. Los centros homotéticos de dos circunferencias son los puntos que dividen el segmento que une sus centros interna y externamente en la razón de los radios de las circunferencias. En estas circunferencias la razón es 1:2. Puesto que el centroide G y el ortocentro H dividen JO de esta manera, son los centros homotéticos.

Se sigue que O y J están armónicamente separados por G y H. La línea de estos cuatro puntos es conocida como la *línea de Euler* del triángulo.

(*d*) La circunferencia de los nueve puntos es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias excritas del triángulo. Esta notable propiedad se conoce con el nombre de *Teorema de Feuerbach,* y se enuncia aquí sin prueba. Su demostración será dada en un capítulo posterior.

5.7 Triángulos relacionados a un grupo ortocéntrico de puntos. Ya que los cuatro triángulos de un grupo ortocéntrico, tienen el mismo triángulo pedal (Sección 5.4), tienen también la misma circunferencia de los nueve puntos. Por lo tanto, los circuncírculos de estos cuatro triángulos son iguales. En la Fig. 36, los circuncentros de los triángulos determinados por los puntos hortocéntricos H, A, B, C son O, O_1, O_2, O_3. Entonces $CO = CO_1$, y L es el punto medio de OO_1. En forma similar, M y N son los puntos medios de OO_2 y OO_3. Por lo tanto, los triángulos LMN y $O_1O_2O_3$ son homotéticos en la razón 1:2, y el último es congruente al triángulo ABC.

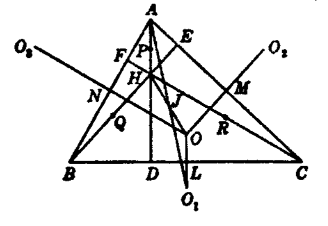


FIG. 36

Así también los cuatro puntos O, O_1, O_2, O_3 están en un grupo ortocéntrico y las posiciones de L, M, N con respecto a este grupo son las mismas que las de P, Q, R con respecto a H, A, B, C. Los ocho triángulos de estos dos grupos ortocéntricos tienen la misma circunferencia de los nueve puntos.

5.8 La línea de Simson. Sean *PX*, *PY* y *PZ* las perpendiculares bajadas a los lados del triángulo *ABC*, desde cualquier punto *P* de su circunferencia circunscrita. Entonces los puntos *X*, *Y*, *Z* son colineales. La línea en que están ellos es llamada la *Línea de Simson* de *P* con respecto al triángulo *ABC*.

Para demostrar que los puntos son colineales, vemos que cada uno de los cuadriláteros *PYXC*, *PZAY* y *PABC* es inscriptible. Entonces los ángulos *PYZ* y *PAZ* son iguales, y ca-

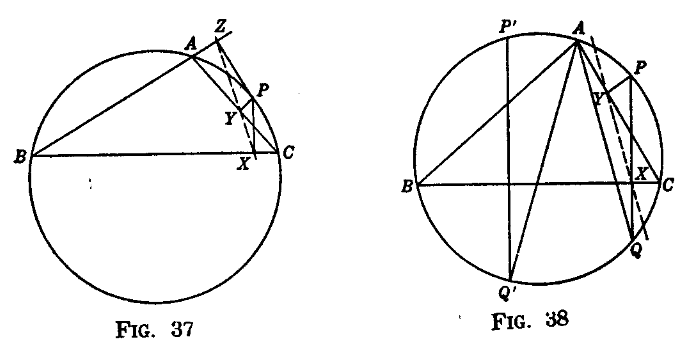


FIG. 37 FIG. 38

da uno es el suplemento del ángulo *BAP*. También el angulo *PCX* es el suplemento del ángulo *BAP*, y es entonces igual al ángulo *PYZ*. Pero el ángulo *XYP* es el suplemento del ángulo *PCX*; entonces los ángulos *XYP* y *PYZ* son suplementarios y los puntos *X*, *Y*, *Z* son colineales. Esto prueba el

TEOREMA: *Si desde cualquier punto de la circunferencia circunscrita de un triángulo, bajamos perpendiculares a los tres lados, los pies de estas perpendiculares están en una línea recta.*

El inverso de este teorema puede ser fácilmente probado. Su enunciado y demostración, se deja como un ejercicio para el estudiante.

5.9 Angulo de intersección de líneas de Simson. En la Fig. 38, dejemos que *PX* se prolongue hasta intersecar nuevamente la circunferencia circunscrita en *Q*, luego dibujemos *AQ*. Entonces *AQ* es paralela a *XY*, la línea de Simson de *P*; ya que el ángulo *YXP* = ángulo *YCP* = ángulo *AQP*. Análogamente la línea de Simson de un segundo punto *P'* en la circunferencia es paralela a *AQ'* donde *P'Q'* es la cuerda por *P'* perpendicular a *BC*. Y ya que los arcos *PP'* y *Q'Q* son

iguales se sigue que el ángulo entre las líneas de Simson de P y P' vale la mitad del ángulo del arco PP'. En particular, las líneas de Simson de los extremos de un diámetro de un circuncírculo, son mutuamente perpendiculares.

5.10 La línea de Simson y la circunferencia de los nueve puntos. Hagamos que la altura por A encuentre la circunferencia circunscrita en K (Fig. 39), y dejemos que PK corte BC en Q y la línea de Simson de P en R. Ahora, puesto que $PBXZ$ es inscriptible, el ángulo RXP = ángulo ZBP = ángulo AKP = ángulo XPR y los triángulos PXR y XQR son isósceles. Entonces R es el punto medio de PQ. También ya que el triángulo KHQ es isósceles, QH es paralela a XZ y T es el punto medio de HP.

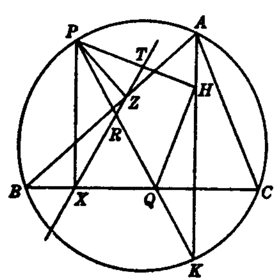


FIG. 39

Puesto que el ortocentro es un centro de homotecia de la circunferencia circunscrita y la circunferencia de los nueve puntos, con la razón 2:1, el punto T está en la circunferencia de los nueve puntos.

La línea de Simson de P', el otro extremo del diámetro que pasa por P; es perpendicular a XZ e interseca HP' en su punto medio T'. Como una consecuencia de las relaciones homotéticas antes mencionadas y el hecho de que PP' es el diámetro de la circunferencia circunscrita, se sigue que TT' es el diámetro de la circunferencia de los nueve puntos. Entonces las dos líneas de Simson, de P y P' se intersecan en ángulos rectos en la circunferencia de los nueve puntos.

Estos resultados pueden ser resumidos en los siguientes

TEOREMAS: *La línea de Simson de un punto P con respecto a un triángulo dado biseca el segmento de línea que une P al ortocentro del triángulo; y el mismo segmento de línea es bisecado por la circunferencia de los nueve puntos. Las líneas Simson de dos puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita de un triángulo se intersecan en ángulos rectos en la circunferencia de los nueve puntos.*

5.11 Circuncírculos de los triángulos determinados por un cuadrilátero.

TEOREMA: *Las circunferencias circunscritas de los cuatro triángulos cuyos lados son los lados de un cuadrilátero completo, tomados tres a un tiempo, tienen un punto en común.*

Si son señalados los lados de un cuadrilátero por *a*, *b*, *c* y *d*; consideremos primero las circunferencias circunscritas a los triángulos *abc* y *abd*. Uno de los puntos comunes a estas circunferencias es el punto de intersección de las líneas *a* y *b*. Sea *P* su segundo punto común, y sean *A*, *B*, *C* y *D* los pies de las perpendiculares desde *P* a *a*, *b*, *c*, *d*. Ahora las líneas de Simson de *P* con respecto a los triángulos *abc* y *abd* tienen a *A* y *B* como puntos comunes; entonces estas líneas coinciden, y *A*, *B*, *C* y *D* son colineales. La aplicación del teorema inverso, enunciado en la Sección 5.8, a los triángulos *acd* y *bcd* muestra que sus circunferencias circunscritas también pasan por el mismo punto *P*.

EJERCICIOS

1. Considere ampliamente los casos especiales de la circunferencia de los nueve puntos para triángulos equiláteros, isósceles y rectos. Dibuje una figura para cada caso.

2. Demuestre en la Fig. 36 que O_2, P y O_3 son colineales.

3. En la Fig. 35, señale los triángulos que son congruentes con el triángulo *LMN*.

4. En la Fig. 35 localice el centro de los nueve puntos del triángulo *LMN*.

5. Demuestre que los centroides de un grupo ortocéntrico de triángulos forman un grupo ortocéntrico de puntos.

6. ¿Qué son las líneas de Simson de los vértices de un triángulo con respecto al triángulo?

7. Los seis segmentos de línea que unen por pares, el incentro y los tres excentros de un triángulo, son bisecados por su circunferencia circunscrita.

8. Construya un triángulo dados los pies de sus alturas.

9. Si dos triángulos están inscritos en la misma circunferencia, las líneas de Simson de cualquier punto de la circunferencia, con respecto a estos triángulos, se intersecan a un ángulo constante.

10. Construya un triángulo, dada su circunferencia circunscrita, el ortocentro y uno de sus vértices.

11. Construya un triángulo dados dos de sus vértices y el centro de la circunferencia de los nueve puntos.

12. Las líneas de Simson de tres puntos con respecto a un triángulo dado forman un triángulo semejante al triángulo determinado por los tres puntos.

13. Tomando como base la propiedad no probada de la Sección 5.6

encontrar treinta y dos circunferencias, cada una de las cuales es tangente a la circunferencia de los nueve puntos.

14. Determine un punto cuya línea de Simson con respecto a un triángulo dado, sea paralela a una línea dada.

5.12 Líneas isogonales y puntos conjugados isogonales. Dos líneas que pasan por el vértice de un ángulo son *líneas conjugadas isogonales*, o más simplemente *isogonales*, con respecto a este ángulo, si la misma línea es bisectriz del ángulo dado y del ángulo formado por las dos líneas. Por ejemplo, la línea que une el vértice de un triángulo a su circuncentro y la altura por ese vértice, son isogonales con respecto al ángulo en ese vértice.

De fundamental importancia en la teoría de isogonales es el

TEOREMA: *Si tres líneas, cada una por el vértice de un triángulo son concurrentes, sus isogonales con respecto a los ángulos del triángulo son concurrentes.*

Sean AP, BQ y CR las isogonales de las líneas concurrentes AS, BS y CS respectivamente.

Por el teorema de Ceva

$$\frac{\operatorname{sen} BAS}{\operatorname{sen} SAC}\cdot\frac{\operatorname{sen} CBS}{\operatorname{sen} SBA}\cdot\frac{\operatorname{sen} ACS}{\operatorname{sen} SCB}=1.$$

FIG. 40

Puesto que AS y AP son isogonales, el ángulo BAS = ángulo PAC y el ángulo SAC = ángulo BAP. Resultados similares se obtienen para los otros pares de isogonales. De ésta y de la ecuación anterior tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} BAP}{\operatorname{sen} PAC}\cdot\frac{\operatorname{sen} CBQ}{\operatorname{sen} QBA}\cdot\frac{\operatorname{sen} ACR}{\operatorname{sen} RCB}=1,$$

y de aquí AP, BQ y CR son concurrentes.

Sea S' su punto común. Entonces S y S' son llamados puntos conjugados isogonales del triángulo ABC. El ortocentro y el circuncentro son puntos conjugados isogonales del triángulo. La bisectriz del ángulo interior de un triángulo es autoisogonal, y el incentro es su propio conjugado isogonal.

5.13 Líneas isotómicas y puntos conjugados isotómicos. Sean P y P' dos puntos en el lado BC del triángulo ABC ta-

les que $BP' = PC$. Entonces las líneas AP' y AP son llamadas *líneas isotómicas* del triángulo.

Sean dibujadas por cada uno de los vértices de este triángulo, un par de líneas isotómicas, y sean tres de ellas, una de cada par, concurrentes en el punto T. Se sigue inmediatamente por el Teorema de Ceva, que las otras tres también son concurrentes. Si su punto de intersección es T', entonces los puntos T y T' son los puntos *conjugados isotómicos* del triángulo.

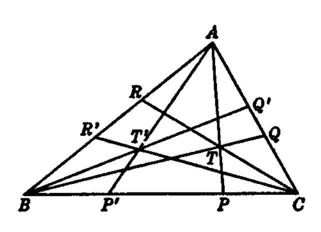


FIG. 41

5.14 Simedianas y punto simediano. Las líneas conjugadas isogonales de las medianas de un triángulo, son sus *simedianas*. Puesto que las medianas son concurrentes, las simedianas también son concurrentes y su punto de intersección es llamado *el punto simediano* del triángulo. El punto mediano y el punto simediano son puntos isogonales conjugados del triángulo.

5.15 Propiedades de las simedianas. Entre las propiedades de las simedianas de un triángulo, se dan algunas de las más importantes en los teoremas que siguen inmediatamente.

TEOREMA: *El lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas a BC con respecto a los lados AB y AC del triángulo ABC, es la simediana por A.*

Sean AL y AL' la mediana y la simediana por A, y sea PQ antiparalela a BC. Con los ángulos en A como se indica en la figura, tenemos, ya que $BL = LC$,

$$\frac{\text{sen}\, y}{\text{sen}\, x} = \frac{AB}{CA};$$

y por las igualdades de los ángulos en A debidas a la isogonalidad

$$\frac{\text{sen}\, \beta}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{AB}{CA}.$$

FIG. 42

Puesto que PQ es antiparalelo a BC

$$\frac{AP}{QA} = \frac{CA}{AB}.$$

Además

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{AP \cdot \text{sen}\,\beta}{QA \cdot \text{sen}\,\alpha}.$$

Combinando estos resultados se obtiene que $PM = MQ$.

Inversamente, sea M el punto medio de la antiparalela PQ. Entonces

$$\frac{AP}{QA} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}; \text{ y también } \frac{CA}{AB} = \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,y}.$$

Ya que

$$\frac{AP}{QA} = \frac{CA}{AB}$$

se infiere que

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,y}.$$

Ahora $x + y = \alpha + \beta < 180°$ y puede ser demostrado por lo tanto que $x = \alpha$, de lo que se sigue que AM es el punto simediano por A. (Ver Ejercicio 11, Pág. 70).

TEOREMA: *Las distancias de cualquier punto en una simediana a los lados de un triángulo concurrentes con esta simediana, son proporcionales a las longitudes de estos lados.*

Sea P (Fig. 43) un punto en la simediana por A, y sean d_1 y d_2 sus distancias a los lados como se muestra. Entonces

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\text{sen}\,BAP}{\text{sen}\,PAC} = \frac{\text{sen}\,LAC}{\text{sen}\,BAL} = \frac{AB}{CA}.$$

FIG. 43

TEOREMA: *Los segmentos en los cuales divide una simediana el lado de un triángulo al cual es trazada, son proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes.*

En la Fig. 43

$$\frac{BL'}{L'C} = \frac{AB \cdot \text{sen}\,BAL'}{CA \cdot \text{sen}\,L'AC},$$

y puesto que

$$\frac{\text{sen } BAL'}{\text{sen } L'AC} = \frac{\text{sen } LAC}{\text{sen } BAL} = \frac{AB}{CA},$$

se infiere

$$\frac{BL'}{L'C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CA}^2}.$$

5.16 El punto simediano. Muchos de los avances en la geometría moderna del triángulo están íntimamente relacionados con su punto simediano. En seguida agrupamos algunas de las propiedades de este punto importante y más adelante en el capítulo indicaremos las direcciones que han tomado algunos de estos avances.

Es obvio que el punto simediano siempre está dentro del triángulo. Como hemos señalado anteriormente, es el conjugado isogonal del punto mediano.

Del segundo teorema de la sección anterior, deducimos el hecho de que las distancias del punto simediano a los tres lados del triángulo, son proporcionales a estos lados. También se puede probar que es el punto dentro del triángulo para el cual la suma de los cuadrados de sus distancias a los lados, es un mínimo. (Ver Ejercicio 12, Pág. 70.)

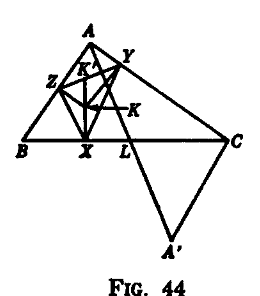


FIG. 44

Si son bajadas perpendiculares del punto simediano K a los lados del triángulo, los pies son los vértices de un triángulo del cual K es el punto mediano.

Prolongue la mediana AL al doble de su longitud, hasta A' y trace CA', y encuentre la intersección, K', de XK con YZ (Fig. 44). Entonces los triángulos ACA' y YKZ son semejantes, porque sus ángulos en C y K son iguales, cada uno es el suplemento del ángulo BAC, y los lados que contienen estos ángulos son proporcionales. Más aún, puesto que los ángulos ACL y YKK' son iguales, las líneas CL y KK', son líneas correspondientes en estos triángulos, de lo que se sigue que XK' es una mediana de XYZ. Similarmente las otras dos medianas pasan por K.

5.17 Propiedades armónicas. En la Fig. 45, sea AL'' la tangente en A de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC del cual K es el punto simediano. Entonces por la semejanza de los triángulos $AL''B$ y $CL''A$ encontramos que

$$\frac{BL''}{L''C} = -\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CA}^2}.$$

y puesto que L' divide el segmento BC internamente en la razón $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CA}^2}$, se infiere que este segmento es dividido armónicamente por L' y L''. Entonces el haz $A(BCL'L'')$ es un haz armónico. La simediana BM' es una transversal de este haz y si su intersección con AL'' es el punto S, entonces S es el conjugado armónico de K con respecto a B y M'.

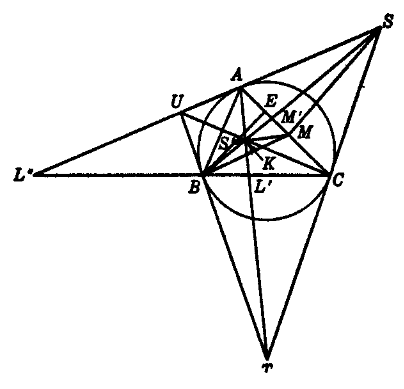


FIG. 45

En una forma similar se puede demostrar que la tangente en C también corta la simediana por B en el punto S. De esta manera la línea que une un vértice de un triángulo con la intersección de las tangentes por los otros dos vértices es la simediana por ese vértice. Esto da una construcción conveniente para las simedianas.

Si se une el punto medio M de CA con B, K y S, obtenemos el haz armónico $M(BM'KS)$. Ahora la altura BE es paralela al rayo MS del haz, y por lo tanto MK interseca BE en su punto medio S'. En otras palabras, *la línea que une el punto medio de un lado de un triángulo con el punto medio de la altura bajada a este lado, pasa por el punto simediano del triángulo.* Esto nos lleva a una construcción simple del punto simediano sin construir las simedianas.

5.18 Exsimedianas y exmedianas. La importancia de las tangentes de las circunferencias circunscritas de un triángulo por sus vértices se señala claramente en la discusión anterior. De acuerdo con su relación a las simedianas, estas tangentes son llamadas las *exsimedianas* del triángulo, y los puntos en los cuales se intersecan dos a dos son llamados sus *pun-*

tos exsimedianos. De esta manera podemos enunciar uno de los resultados importantes de la Sección 5.17 como sigue:

Dos exsimedianas cualquiera y la tercera simediana de un triángulo son concurrentes en uno de sus puntos exsimedianos.

Igualmente, las líneas paralelas a los lados de un triángulo por los vértices de éste son llamadas las *exmedianas* del triángulo y los puntos de intersección dos a dos son llamados los *puntos exmedianos*. Dos exmedianas cualesquiera y la tercera mediana de un triángulo son concurrentes en uno de sus puntos exmedianos. Existen obvias relaciones armónicas con relación a las medianas, exmedianas, punto mediano y puntos exmedianos, análogas a las señaladas en la sección inmediata anterior.

EJERCICIOS

1. El punto mediano de un triángulo es isotómicamente autoconjugado. Encontrar otros puntos isotómicamente autoconjugados.

2. El incentro es isogonalmente autoconjugado. Encontrar otros puntos isogonalmente autoconjugados.

3. El punto de Nagel y el punto de Gergonne, son conjugados isotómicos.

4. Localizar el punto simediano de un triángulo rectángulo.

5. Localice el conjugado isogonal de un punto en el lado de un triángulo.

6. Demuestre que el conjugado isogonal de un punto en la circunferencia circunscrita de un triángulo es un punto al infinito.

7. Si bajamos perpendiculares de cada uno de dos puntos conjugados isogonales a los lados de un triángulo, los seis pies de estas perpendiculares están en una circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que une estos dos puntos.

8. Los puntos S, T, U son los puntos medios de los lados EF, FD, DE del triángulo pedal DEF del triángulo ABC. Demostrar que AS, BT, CU son concurrentes.

9. La línea determinada por las proyecciones de cualquier punto a los lados de un ángulo es perpendicular a la conjugada isogonal de la línea que une el vértice del ángulo a ese punto.

10. Enunciar y probar relaciones armónicas sugeridas por el último enunciado de la Sección 5.18.

11. Demostrar que si $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$ donde $x + y = \alpha + \beta < 180°$, entonces $x = \alpha$ y $y = \beta$.

12. Encontrar la función $G(x,y,z)$ que complete la identidad $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \equiv (ax + by + cz)^2 + G(x,y,z)$ y usar la identidad para demostrar que el punto simediano es el punto dentro del triángulo para el cual la suma de los cuadrados de las distancias a los lados del triángulo es un mínimo.

13. Probar por medio de la Sección 1.5 que una exsimediana divide el lado en el cual es dibujada, externamente en la relación de los cuadrados de los lados adyacentes.

14. Probar que las simedianas son concurrentes por el teorema de la Sección 3.2. Hacer lo mismo para dos exsimedianas y la tercera simediana.

5.19 Los puntos de Brocard. Muchas de las investigaciones que fueron hechas durante la última parte del siglo diecinueve referentes al triángulo giran alrededor de conceptos y relaciones sugeridas por dos puntos, con los cuales vamos a trabar conocimiento nosotros mismos ahora. En el triángulo ABC, vamos a considerar la circunferencia que pasa por A y es tangente a BC en B, la que pasa por B y es tangente a CA en C, y la que pasa por C y es tangente a AB en A. Si llamamos a Ω el segundo punto de intersección de las dos primeras circunferencias, tenemos que $\angle BA\Omega = \angle CB\Omega = \angle AC\Omega$; y de la igualdad del primero y el último de estos ángulos se sigue que la tercera circunferencia pasa también a través de Ω.

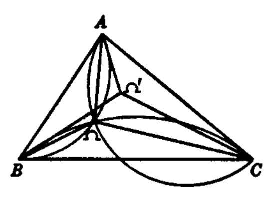


FIG. 46

De manera semejante, considerando las tres circunferencias correspondientes, la primera de las cuales pasa a través de A y es tangente a BC en C, etc., encontramos un segundo punto Ω' tal que

$$\angle \Omega' AC = \angle \Omega' CB = \angle \Omega' BA.$$

Hemos encontrado en esta forma dos puntos Ω y Ω', cada uno de los cuales tiene la propiedad de que, si se trazan líneas de los vértices del triángulo a ellos, los ángulos que estas líneas forman con los lados del triángulo son iguales. Se puede demostrar que solamente existen dos de estos puntos. De estos dos puntos, Ω es llamado *el punto positivo de Brocard* y Ω' es llamado *el punto negativo de Brocard* del triángulo dado. Las líneas que unen los puntos de Brocard a los vértices serán llamados *rayos de Brocard* del triángulo, los que pasan por Ω son los *primeros rayos de Brocard* y los que pasan por Ω' los *segundos rayos de Brocard.*

5.20 El ángulo de Brocard. Unamos Ω a los vértices del triángulo y hagamos que $B\Omega$ corte la exmediana por A en D.

Entonces los puntos A, Ω, C, D son concíclicos. Ya que si denotamos $\angle CB\Omega$ por ω, tendremos también $\angle AC\Omega = \angle AD\Omega = \omega$. Más aún, $\angle C\Omega A = \angle B + \angle C$, entonces $\angle ADC = \angle A$ y, por lo tanto, $\angle DCA = \angle B$. Entonces CD es la exsimediana por C, y tenemos el importante resultado:

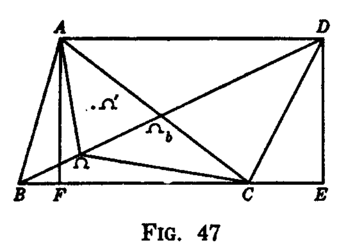


FIG. 47

La exmediana por A, el primer rayo de Brocard por B y la exsimediana por C son concurrentes.

Si DE y AF son dibujadas perpendiculares a BC (Fig. 47), el ángulo ECD = ángulo A. También

$$\cot \omega = \frac{BE}{ED} = \frac{BF}{FA} + \frac{FC}{FA} + \frac{CE}{ED} = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Denotando por ω' el ángulo $\Omega' AC$, y observando la simetría de la última ecuación encontramos que $\cot \omega = \cot \omega'$, y de aquí que $\omega = \omega'$. Por lo tanto, los puntos de Brocard de un triángulo son puntos conjugados isogonales. El ángulo ω es llamado el *ángulo de Brocard* del triángulo.

5.21 Relaciones con medianas y simedianas. Aplicando el inverso del Teorema de Ceva a las líneas concurrentes AD, BD y CD (Fig. 47), encontramos que $\frac{C\Omega_b}{\Omega_b A} = \frac{a^2}{b^2}$, donde Ω_b es la intersección de $B\Omega$ con CA. También la simediana por C divide a AB en la razón $\frac{b^2}{a^2}$; entonces la mediana por A, el primer rayo de Brocard por B, y la simediana por C son concurrentes.

5.22 Valor límite del ángulo de Brocard. Se demostrará que el ángulo de Brocard cuyo valor es $\cot^{-1}(\cot A + \cot B + \cot C)$ es cuando más igual a 30°. Del hecho de que la suma de $C\Omega b$ y $\Omega_b A$ es b y su razón $\frac{a^2}{b^2}$, encontramos

$$C\Omega_b = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\,; \quad \Omega_b A = \frac{b^3}{a^2 + b^2}.$$

Ahora, del triángulo $BC\Omega_b$

$$\frac{\text{sen}\,(C+\omega)}{\text{sen}\,\omega} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2,$$

y por lo tanto el sen ω no puede ser mayor que ½. Entonces ω no excede de 30°.

Obviamente sen ω = ½ y ω = 30° cuando el triángulo es equilátero.

5.23 La circunferencia de Brocard y los triángulos de Brocard. La circunferencia cuyo diámetro es el segmento de línea que une el circuncentro de un triángulo y su punto simediano es la *circunferencia de Brocard* del triángulo.

Cada una de las perpendiculares OL, OM, y ON del circuncentro a los lados del triángulo intersecan la circunferencia de Brocard en O. Sean los segundos puntos de intersección de estas líneas con la circunferencia, A', B', C'. El triángulo $A'B'C'$ es conocido como el *primer triángulo de Brocard.*

También las simedianas AK, BK y CK intersecan la circunferencia de Brocard en K. Si A'', B'', C'' son los segundos puntos de intersección de las simedianas con esta circunferencia, el triángulo $A''B''C''$ es llamado el *segundo triángulo de Brocard.*

5.24 Los puntos de Brocard están en la circunferencia de Brocard. Puesto que (Fig. 48) el ángulo $KA'O$ es un ángulo recto, KA' es paralela a BC y las distancias de K y A' a BC son iguales. Resultados similares se obtienen con respecto a los otros lados del triángulo, entonces

$$\frac{A'L}{LB} = \frac{B'M}{MC} = \frac{C'N}{NA},$$

y por lo tanto los triángulos rectángulos BLA', CMB' y ANC' son semejantes, de lo que se sigue que BA', CB' y AC' se intersecan en Ω.

Para demostrar que Ω está en la circunferencia de Brocard observamos que $\angle\Omega A'O = \angle\Omega C'O$, entonces los cuatro puntos Ω, O, A', C', son concíclicos. Pero la circunferencia por los últimos tres de estos puntos es la circunferencia de Brocard. Análogamente se puede probar que Ω' también está en la misma circunferencia. Es el punto de intersección de CA', AB' y BC'.

El triángulo $\Omega O\Omega'$ es isósceles y su base $\Omega\Omega'$ es perpendicular al diámetro OK. Esto se sigue del hecho de que los ángulos iguales $\Omega C'O$ y $OC'\Omega'$ subtienden en la circunferencia de Brocard los arcos iguales ΩO y $O\Omega'$.

5.25 **El primer triángulo de Brocard.** En la Fig. 48 los ángulos $A'\Omega C'$ y $B'\Omega A'$ son iguales respectivamente a los ángulos B y C del triángulo dado. Pero ellos también son iguales

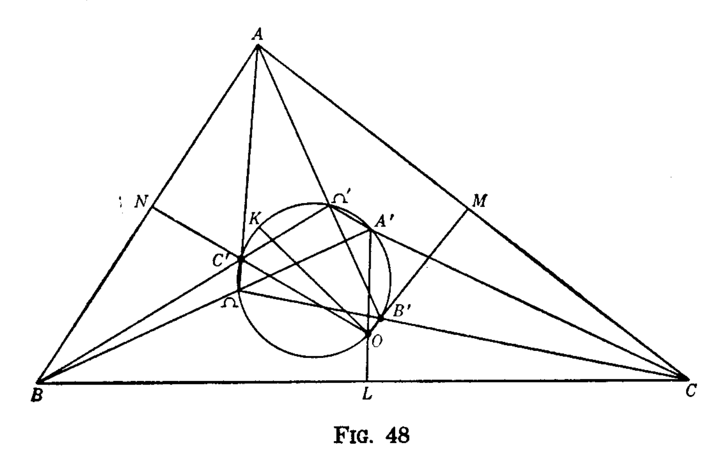


Fig. 48

a los ángulos B' y C' del triángulo $A'B'C'$. Entonces el primer triángulo de Brocard es semejante al triángulo dado.

El primer triángulo de Brocard está en perspectiva con el triángulo ABC, las líneas AA', BB', y CC' resultan concurrentes. Esto puede ser probado aplicando el Teorema de Ceva a estas líneas considerándolas como transversales que pasan por los vértices del triángulo ABC. Puesto que cada ángulo de la base de los triángulos isósceles semejantes $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ es el ángulo de Brocard ω, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} BAA'}{\operatorname{sen} A'AC} = \frac{\operatorname{sen}(B-\omega)}{\operatorname{sen}(C-\omega)}; \quad \frac{\operatorname{sen} CBB'}{\operatorname{sen} B'BA} = \frac{\operatorname{sen}(C-\omega)}{\operatorname{sen}(A-\omega)};$$

$$\frac{\operatorname{sen} ACC'}{\operatorname{sen} C'CB} = \frac{\operatorname{sen}(A-\omega)}{\operatorname{sen}(B-\omega)}.$$

La multiplicación de estas dos ecuaciones da el resultado deseado. Se sigue por el Teorema de Desargues, que los puntos de intersección de los lados correspondientes de estos dos triángulos, son colineales.

Si trazamos líneas por los vértices del triángulo dado, paralelas a los lados correspondientes del primer triángulo de Brocard, ellas se intersecarán en un *punto de la circunferencia circunscrita, conocido como punto de Steiner*. El punto de la circunferencia circunscrita diametralmente opuesto al punto de Steiner es llamado *punto de Tarry*. Es el punto de concurrencia de líneas por los vértices del triángulo, que son perpendiculares a los lados del primer triángulo de Brocard.

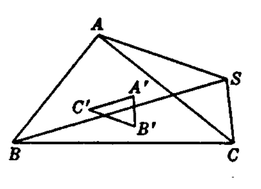


FIG. 49

La concurrencia de las líneas antes mencionadas en el punto de Steiner es probada fácilmente. Sean AS y BS paralelas respectivamente a $B'C'$ y $C'A'$ (Fig. 49). Entonces $\angle ASB = \angle B'C'A' = \angle ACB$, y de aquí S está en la circunferencia circunscrita. Obviamente las paralelas por C a $A'B'$ también pasan por S.

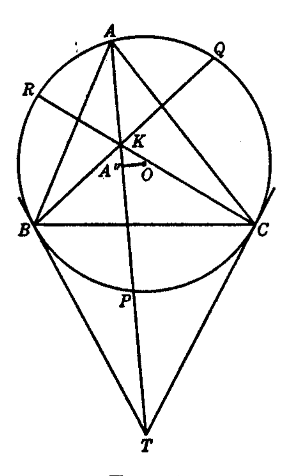


FIG. 50

El que las perpendiculares a los lados del primer triángulo de Brocard que pasan por los vértices del triángulo dado pasan por el punto de Tarry, puede ser probado de una manera semejante.

5.26 Segundo triángulo de Brocard. Prolonguemos las simedianas del triángulo ABC hasta cortar la circunferencia circunscrita en P, Q y R (Fig. 50). El vértice A'' del segundo triángulo de Brocard, que está en AK es el pie de la perpendicular de O a AK, puesto que el ángulo $OA''K$ está inscrito en una semicircunferencia. Por lo tanto A'' es el punto medio de AP. Es decir, los vértices del segundo triángulo de Brocard bisecan las cuerdas de la circunferencia circunscrita al triángulo dado sobre las cuales están sus simedianas.

Las siguientes relaciones se verifican fácilmente:

(*a*) Los cinco puntos B, T, C, O, A'' son concíclicos, donde T es el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita en B y C. El centro de

la circunferencia en la cual están es el punto medio de OT.

(*b*) $\angle AA''B = \angle CA''A = 180° - \angle BAC$.

(*c*) La circunferencia por A, B, A'' es tangente a CA y la que pasa por C, A, A'' es tangente a AB. Entonces de las seis circunferencias usadas en la Sección 5.19 para localizar los puntos de Brocard, las dos que son tangentes a dos lados del triángulo dado en un vértice común se intersecan nuevamente en el vértice correspondiente del segundo triángulo de Brocard.

5.27. La primera circunferencia de Lemoine. Si se trazan paralelas a los lados de un triángulo por su punto simediano, los seis puntos en que cortan los lados del triángulo están en una circunferencia que es llamada la *primera circunferencia de Lemoine* del triángulo.

Sean las paralelas por el punto K trazadas y señaladas como se muestra en la Fig. 51. Entonces AQ_2KP_3 es un paralelogramo, Q_2P_3 es bisecado por AK. Entonces Q_2P_3 es antiparalela a BC y asimismo a P_1Q_1 (Sección 5.15). Por lo tanto, P_1, Q_1, P_3, Q_2 son concíclicos; asimismo P_2, Q_2, P_1, Q_3, son concíclicos. Los ángulos P_3Q_2A y BP_1Q_3 son iguales, puesto que son iguales al ángulo ACB; y de aquí se sigue que el trapezoide $Q_2P_1Q_3P_3$ es un trapecio. Por lo tanto, sus vértices son concíclicos. Entonces los seis puntos P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3 están en una circunferencia.

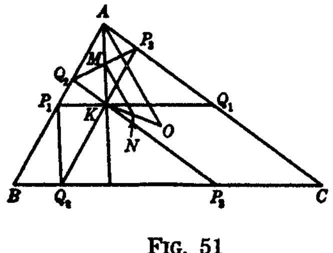


FIG. 51

La primera circunferencia de Lemoine y la circunferencia de Brocard son concéntricas: Puesto que Q_2P_3 es antiparalela a BC y, por tanto, es perpendicular a AO. Entonces la mediatriz de Q_2P_3 es paralela a AO y biseca KO en N. Análogamente el punto N, que es el centro de la circunferencia de Brocard, está en la mediatriz de Q_3P_1. Entonces N es también el centro de la primera circunferencia de Lemoine.

Por triángulos semejantes y por el hecho de que la simediana de un triángulo divide el lado al que es dibujada

en la razón de los cuadrados de los lados adyacentes, obtenemos

$$\frac{BQ_3}{Q_3P_2} = \frac{Q_2K}{KP_2} = \frac{c^2}{a^2};$$

y similarmente

$$\frac{Q_3P_2}{P_2C} = \frac{a^2}{b^2}.$$

de esto se sigue que

$$Q_3P_2 = \frac{a^3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

también obtenemos

$$Q_1P_3 = \frac{b^3}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{y} \quad Q_2P_1 = \frac{c^3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Por lo tanto las cuerdas que la primera circunferencia de Lemoine determina en los lados del triángulo son proporcionales a los cubos de esos lados.

5.28 La segunda circunferencia de Lemoine. Una situación parecida a la descrita en la sección anterior existe, si, en lugar de las paralelas trazamos las antiparalelas a los lados por el punto simediano. Los seis puntos en los cuales estas antiparalelas cortan los lados, también están en una circunferencia, que es llamada *la segunda circunferencia de Lemoine* del triángulo. Obviamente K (Fig. 52) es el punto medio de cada uno de los segmentos P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3. También por el antiparalelismo, cada uno de los triángulos KQ_1P_3, KQ_2P_1 y KQ_3P_2 es isósceles. Entonces los seis puntos están en una circunferencia cuyo centro es K.

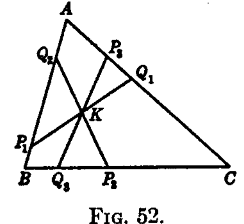


FIG. 52.

Después del hecho de que esta circunferencia corta los lados del triángulo en las extremidades de tres de sus diámetros, su propiedad más interesante, es de que las cuerdas que determina en los lados del triángulo son proporcionales a los cosenos de los ángulos opuestos. Debido

a esta propiedad es llamada también la *circunferencia de los cosenos* del triángulo.

La primera circunferencia de Lemoine es llamada a menudo la *circunferencia de Lemoine*.

EJERCICIOS

1. Las distancias de un vértice de un triángulo a sus puntos de Brocard son proporcionales a los lados que se cortan en ese vértice.

2. Demostrar que $\cot \omega = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$ y basándose en esto probar que $\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$.

3. En función de las longitudes de los lados de un triángulo, y de su ángulo de Brocard, encontrar las distancias del punto simediano a los lados.

4. Un triángulo y el primer triángulo de Brocard, tienen el mismo punto mediano.

5. Si un conjunto de rayos de Brocard del triángulo ABC intersecan su circunferencia circunscrita nuevamente en P, Q, R, demostrar que los triángulos ABC y PQR son congruentes.

6. Si las simedianas del triángulo ABC intersecan nuevamente la circunferencia circunscrita en P, Q, R, demostrar que los triángulos PQR y ABC, tienen la misma circunferencia de Brocard.

7. Completar la prueba referente al punto de Tarry mencionado en la Sección 5.25.

8. Probar la propiedad de la segunda circunferencia de Lemoine de acuerdo a la cual es también llamada la circunferencia de los cosenos.

9. Demostrar que es posible construir un número infinito de triángulos que tengan la misma circunferencia de los cosenos.

10. En la Fig. 52 demostrar que los triángulos $P_1P_2P_3$ y $Q_1Q_2Q_3$ son semejantes al triángulo ABC.

11. Si ρ_1, ρ_2 y R son los radios de la primera circunferencia de Lemoine, de la segunda circunferencia Lemoine y de la circunferencia circunscrita de un triángulo demostrar que $4\rho_1^2 = \rho_2^2 + R^2$.

12. Construir un triángulo, dado un lado y uno de sus puntos de Brocard.

13. T es un punto cualquiera de la línea OK donde O es el circuncentro y K el punto simediano del triángulo ABC. A', B', C' son los puntos en los cuales KA, KB, KC son intersecadas por las paralelas por T a OA, OB, OC. Si por A', B', C' dibujamos líneas antiparalelas a BC, CA, AB los seis puntos en los cuales ellas intersecan los lados del triángulo son concíclicos. Las circunferencias así deter-

minadas, una para cada posición de T, son conocidas como las *circunferencias de Tucker.*

14. Demostrar que la circunferencia circunscrita, la primera circunferencia de Lemoine y la segunda circunferencia de Lemoine son circunferencias de Tucker.

15. Los pares de puntos P_1, Q_2; P_2, Q_3; P_3, Q_1 están en los lados AB, BC, CA del triángulo ABC respectivamente y las líneas P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, son antiparalelas a los lados. También P_3Q_2, P_1Q_3, P_2Q_1, son paralelas a los lados. Demostrar que estos seis puntos están en una circunferencia de Tucker.

16. En el ejercicio anterior demostrar que el triángulo cuyos vértices son la intersección de las paralelas a los lados tiene el mismo punto simediano que el triángulo ABC.

CAPITULO 6

CIRCUNFERENCIAS COAXIALES

6.1 Potencia de un punto. Si P es un punto cualquiera en el plano de una circunferencia dada, y una línea por P interseca la circunferencia en A y B, el producto de los segmentos PA y PB es constante. Esta propiedad característica de una circunferencia nos lleva a la formulación de la

DEFINICIÓN: La *potencia de un punto* con respecto a una circunferencia, es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.

Se sigue que la potencia de un punto es negativa, cero o positiva de acuerdo si el punto está dentro, en, o fuera de la circunferencia. Es también fácil verificar que, para cualquier posición de P, su potencia con respecto a una circunferencia cuyo centro es O y cuyo radio es r, es $\overline{PO}^2 - r^2$. Si P está fuera de la circunferencia su potencia es igual al cuadrado de la longitud de una tangente de él a la circunferencia.

Un punto puede ser visto como una circunferencia de radio cero. Tal circunferencia es llamada circunferencia nula o *circunferencia puntual.* La definición anterior propiamente interpretada, es aplicable a tal circunferencia. Entonces la potencia del punto P con respecto a una circunferencia nula O es $\overline{PO}^2$.

6.2 Eje radical. El *eje radical* de dos circunferencias es el lugar geométrico de un punto cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual.

Para demostrar que el lugar geométrico definido anteriormente es una línea recta, vamos a considerar primero dos circunferencias no concéntricas cuyos centros son O y O' y cuyos radios son r y r'. Por P, un punto que tiene la misma potencia con respecto a estas circunferencias, dibujamos PM perpendicular a la línea de los centros OO' (Fig. 53). Entonces

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2.$$

Restando $\overline{MP}^2$ nos da

$$\overline{OM}^2 - r^2 = \overline{MO'}^2 - r'^2,$$

y puesto que $OM + MO' = OO'$, tenemos

$$OM - MO' = \frac{r^2 - r'^2}{OO'}.$$

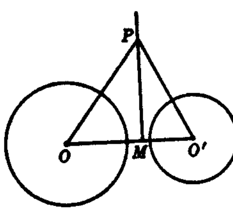


Fig. 53.

Ahora hay sólo un punto M en OO' que satisface estas relaciones. Si N es un punto cualquiera semejante, tenemos

$$OM - MO' = ON - NO';$$

esto es

$$ON - MN - MO' = ON + MN - MO',$$

y entonces $MN = 0$; es decir, N coincide con M.

Por lo tanto, si un punto tiene potencias iguales con respecto a las dos circunferencias O y O', está en una perpendicular a la línea de sus centros. Inversamente, se puede demostrar, invirtiendo los primeros pasos de la discusión anterior, que, si P está en la perpendicular a OO', en M, sus potencias con respecto a estas circunferencias son iguales.

Si los centros de dos circunferencias de radios desiguales se aproximan, el punto M se aproxima al punto al infinito en OO' y la línea MP tiende a la línea al infinito. Así que el eje radical de dos circunferencias concéntricas desiguales se define como la línea al infinito. El eje radical de dos circunferencias iguales concéntricas, se dejará indefinido, y cualquier enunciado acerca del eje radical no es aplicable a tales circunferencias. Si dos circunferencias se intersecan, su eje radical pasará por sus puntos comunes. Si son tangentes una a la otra, es su tangente común en el punto de contacto.

6.3 Centro radical.

Teorema: *Los ejes radicales de tres circunferencias tomadas por pares son concurrentes.*

Consideremos primero tres circunferencias, cuyos centros no son colineales, y sea P la intersección del eje radical de la primera y segunda con el de la segunda y tercera. Enton-

ces P tendrá potencias iguales con respecto a las tres circunferencias, y entonces el eje radical de la primera y tercera también pasará por P.

Si los centros de las tres circunferencias son colineales, los ejes radicales son paralelos y distintos, o dos de ellos coinciden y la línea común es paralela al tercero, o los tres coinciden. En cada uno de estos casos especiales, las líneas son concurrentes en un punto al infinito.

El punto de concurrencia de tres de los ejes radicales de tres circunferencias tomadas en pares, es llamado su *centro radical.* *

6.4 Construcción del eje radical. El eje radical de dos circunferencias no concéntricas puede ser construido como sigue:

Dibujemos una circunferencia cualquiera que corte las circunferencias dadas en A, A' y B, B' respectivamente. Por P, la intersección de AA' y BB', dibujamos la perpendicular a la línea de los centros de las circunferencias dadas. Esta perpendicular es el eje radical requerido como se puede probar fácilmente.

6.5 Circunferencias ortogonales a dos circunferencias.

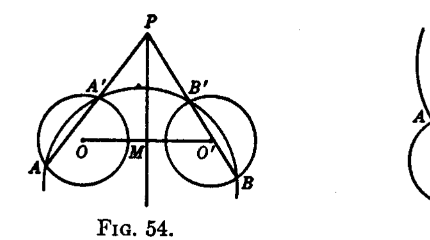


FIG. 54.



FIG. 55.

TEOREMA: *El centro de una circunferencia que corta a dos circunferencias ortogonalmente, está en el eje radical de estas últimas; y si una circunferencia cuyo centro está en el eje radical de dos circunferencias, es ortogonal a una de ellas, es también ortogonal a la otra.*

Si P es el centro de una circunferencia que es ortogonal a las circunferencias O y O', tenemos de los triángulos rectángulos PAO y $O'A'P$ (Fig. 55),

$$\overline{PA}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2;\ \overline{PA'}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'A'}^2.$$

* Debe notarse el caso en el cual el centro radical es indeterminado.

De esta manera P tiene potencias iguales con respecto a las circunferencias O y O' y está en su eje radical.

En seguida, dejemos a P en el eje radical de las circunferencias O y O' y hagamos que la circunferencia P corte ortogonalmente la circunferencia O. De la igualdad de las potencias de P y del hecho que el ángulo OAP es recto, se sigue que el ángulo $PA'O'$ también es recto y la circunferencia P es ortogonal a la circunferencia O'.

De acuerdo con su importancia en lo siguiente, probaremos en seguida estos dos teoremas:

TEOREMA: *Todas las circunferencias que cortan ortogonalmente a dos circunferencias que no se intersecan, intersecan la línea de sus centros en los mismos dos puntos.*

TEOREMA: *Una circunferencia que corta ortogonalmente a dos circunferencias que se intersecan, no intersecta la línea de sus centros.*

Para probar el primero de estos teoremas, nos referiremos a la Fig. 55 y observando que, puesto que las circunferencias O y O' no se intersecan, OM es mayor que el radio OA, entonces PM es menor que PA y, por lo tanto, la circunferencia P interseca OO' en L y L'.

Entonces

$$\overline{PL}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP}^2 - \overline{OA}^2,$$

y

$$\overline{LM}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2.$$

Esta ecuación nos muestra que la posición de L es independiente de la de P. Por lo tanto cualquier circunferencia ortogonal a O y O' pasa por L. Asimismo cualquiera de estas circunferencias pasa por L', y LL' es bisecada por M.

Si las circunferencias O y O' se intersecan, el punto M está dentro de ambas, OM es menor que el radio OA, PM es mayor que PA, y la circunferencia P no interseca OO'.

6.6 Ejes radicales de incírculo y excírculos.

TEOREMA: *El eje radical de la circunferencia inscrita y de las circunferencias excritas de un triángulo tomadas por pares, son las bisectrices de los ángulos del*

triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado.

Daremos la prueba para la circunferencia inscrita y para una de las excritas. Refiriéndonos a la Fig. 33, en la cual, L, M, N son los puntos medios de los lados, observamos que el eje radical de las circunferencias I e I_1 pasa por L, puesto que este punto tiene la misma potencia con respecto a cada una de estas circunferencias. También es perpendicular a II_1, la bisectriz del ángulo interior A. Ahora la bisectriz del ángulo interior A, es paralela a la bisectriz del ángulo MLN y, por tanto, el eje radical es la bisectriz del ángulo exterior en L, del triángulo LMN. Puede ser demostrado fácilmente que la bisectriz del ángulo interior en L es el eje radical de las otras dos circunferencias excritas.

De esta manera vemos que el centro radical de las tres circunferencias excritas es el incentro del triángulo LMN, mientras que el de dos de sus excírculos y el incírculo es uno de sus excentros. Puesto que estas circunferencias no se intersecan, todos los centros radicales están fuera de las circunferencias. Los cuatro centros radicales forman un grupo ortocéntrico de puntos.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto cuya potencia con respecto a una circunferencia dada es constante?
2. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto cuya suma de potencias con respecto a dos circunferencias es constante? Considere dos circunferencias concéntricas así como dos no concéntricas.
3. El lugar geométrico de un punto, cuya diferencia de potencias con respecto a dos circunferencias no concéntricas es constante, es una línea recta paralela a su eje radical.
4. El eje radical de dos circunferencias que tienen una tangente común biseca el segmento de la tangente común determinado por los puntos de contacto.
5. Construir el eje radical de dos circunferencias sin hacer uso de los centros o la línea de los centros de las circunferencias.
6. Las tangentes a dos circunferencias en puntos antihomólogos, se intersecan en el eje radical de las circunferencias.
7. Enunciar y probar un teorema que se refiera al centro radical de tres circunferencias construidas con los lados de un triángulo como diámetros.
8. Determine si es posible para el centro de una de dos circunferencias ortogonales estar en la otra circunferencia.

9. Si cada una de las circunferencias de una pareja corta ortogonalmente a cada una de una segunda pareja entonces el eje radical de cada par es la línea de los centros del otro.

10. El lugar geométrico de un punto cuyas potencias con respecto a dos circunferencias dadas, tienen una razón constante, es una circunferencia cuyo centro es colineal con los centros de las circunferencias dadas.

11. Por un punto dado dibujar una circunferencia que sea ortogonal a dos circunferencias dadas.

12. Por un punto dado, dibujar una circunferencia que tenga con una circunferencia dada una línea dada como eje radical.

13. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que bisecan cada una de dos circunferencias dadas, es una línea perpendicular a la línea de los centros de las circunferencias.

14. Si por un punto en el eje radical de dos circunferencias, dibujamos secantes a cada una de las dos circunferencias, los cuatro puntos determinados en las circunferencias son concíclicos.

15. Encontrar el eje radical de la circunferencia circunscrita y la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo.

16. Completar la prueba del teorema de la Sección 6.6.

17. Demostrar que existe una circunferencia que es ortogonal a las tres circunferencias excritas de un triángulo; y también que existe una circunferencia ortogonal a la circunferencia inscrita y dos cualesquiera de las excritas.

18. Sean AD, BE, CF las alturas del triángulo ABC, y hagamos que EF corte a BC en X, DE corte a AB en Y, y FD corte a CA en Z. Demostrar que X, Y y Z son colineales y que la línea en que ellos están es perpendicular a la línea de Euler del triángulo.

19. En el triángulo ABC los puntos P, Q, y R están en BC, CA y AB respectivamente, y las líneas AP, BQ, CR son concurrentes. Demostrar que el centro radical de las circunferencias que tienen estas líneas como diámetros es el ortocentro del triángulo ABC.

20. Localizar el centro radical de las circunferencias que tienen a BC, BH y CH como diámetros, cuando H es el ortocentro del triángulo ABC.

21. Construir una circunferencia tal que las tangentes a ella a partir de tres puntos dados, tengan longitudes dadas.

22. Demostrar que se puede trazar una circunferencia que tenga como centro a cualquier punto de la cuerda común a dos circunferencias que se intersecan y tal que dos de sus diámetros sean las cuerdas que tiene en común con las circunferencias dadas.

23. La diferencia entre los cuadrados de las longitudes de las tangentes desde cualquier punto a dos circunferencias es igual a dos veces el producto de la distancia del punto al eje radical y la distancia entre los centros de las circunferencias.

24. Si dos circunferencias concéntricas dadas tienen un eje radical y una tercera circunferencia tiene con cada una de ellas una línea común como eje radical, la tercera circunferencia es concéntrica con las dadas.

6.7 Circunferencias coaxiales. Si un conjunto de circunferencias es tal que la misma línea es eje radical de todo par, se dice que las circunferencias son *coaxiales*. El eje radical de los pares de circunferencias se llama *eje radical* del conjunto coaxial.

Obviamente, los centros de las circunferencias de un conjunto coaxial son colineales. También si dos de ellas se intersecan, cualquier circunferencia del conjunto pasa a través de los mismos dos puntos. De otro modo no habría dos circunferencias del conjunto que se intersecaran. Es además inmediato que el eje radical de un conjunto de circunferencias coaxiales es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a todas las circunferencias del conjunto son iguales.

Dos circunferencias distintas pueden pertenecer solamente a un conjunto coaxial; y dos circunferencias distintas determinan siempre, de modo único a un conjunto de circunferencias que son coaxiales con ellas. Además, si dos puntos diferentes tienen iguales potencias con respecto a tres o más circunferencias, las circunferencias son coaxiales.

Por la Sección 6.5 se sigue que, si una circunferencia corta a dos circunferencias de un conjunto coaxial ortogonalmente, cortará a todas las circunferencias del conjunto también ortogonalmente.

6.8 Circunferencias coaxiales que se intersecan. Si una circunferencia de un conjunto coaxial corta al eje radical en dos puntos, entonces toda circunferencia del conjunto pasa a través de los mismos dos puntos y la línea de los centros es mediatriz de la cuerda común. De acuerdo con que r sea menor que, igual a, o mayor que la mitad de la longitud de la cuerda común, existe: ninguna circunferencia, una circunferencia o dos circunferencias del conjunto que tengan a r como radio.

De la discusión de la Sección 6.5 obtenemos de inmediato:

TEOREMA: *Todas las circunferencias que son ortogonales a dos circunferencias que no se corten, pertenecen a un conjunto coaxial de circunferencias que se intersecan cuya línea de los centros es el eje radical de las dos circunferencias.*

6.9 Circunferencias coaxiales que no se intersecan. El eje radical de un conjunto de circunferencias coaxiales puede no intersecar a estas circunferencias, en cuyo caso ninguna de las circunferencias cortará a otra. Sean dos circunferencias cuyos centros son O y O' (Fig. 56) dos circunferencias de tal conjunto, y sea M el punto en que el eje radical corta a la línea de los centros. Trácense las tangentes MP y MP' a las dos circunferencias, y, con centro en M y MP como radio, trácese una circunferencia que corta a la línea de los centros en L y L'. Esta circunferencia es ortogonal a cada una de las circunferencias dadas y en consecuencia también ortogonal a cada una de las circunferencias coaxiales del conjunto que determinan las dos primeras.

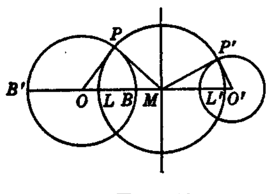


FIG. 56

Como la tangente en P a la circunferencia M pasa a través de O, vemos que las otras circunferencias del conjunto pueden construirse del modo siguiente:

En cualquier punto S de la circunferencia M trácese su tangente y sea O'' la intersección de esta tangente con la línea de los centros. La circunferencia con centro en O'' y $O''S$ como radio es una circunferencia del conjunto. Además, para cada $r \geqq 0$ hay dos circunferencias del conjunto que tienen a r como radio. A L y L' las circunferencias puntuales del conjunto se les denomina *puntos límites*. Ninguna de las circunferencias coaxiales tiene como centro a un punto interior del segmento LL'.

6.10 Relación con las circunferencias de Apolonio.

TEOREMA: *Cada una de las circunferencias de un conjunto coaxial de circunferencias ajenas, es decir, que no se intersecan, es una circunferencia de Apolonio con respecto a los puntos límites del conjunto.*

Para probar esto, sean (Fig. 56) B y B' los puntos en que la circunferencia O, una circunferencia arbitraria del conjunto, corta a la línea de los centros. Como las circunferencias cuyos diámetros son LL' y BB' son ortogonales, los puntos L y L' están separados armónicamente por B y B'. En consecuencia, la circunferencia de Apolonio que es el lugar

geométrico de los puntos cuya razón de distancias a L y L' tiene el valor $LB : L'B$, pasa por B y B' como extremidades de un diámetro. Puesto que sólo hay una circunferencia con BB' como diámetro, la circunferencia O es la circunferencia de Apolonio con respecto a L y L'.

6.11 Sistemas de circunferencias ortogonales. Se concluye a partir del teorema de la Sección 6.8 que toda circunferencia que interseca a cada una de las circunferencias de un conjunto coaxial cuyos elementos son nuevamente ajenos, y que lo hace ortogonalmente pertenece a un conjunto coaxial de circunferencias que se intersecan cuya línea de los centros es el eje radical del primer conjunto. Además, las circunferencias que son ortogonales a cada una de las circunferencias de un conjunto coaxial cuyos elementos se cortan, tienen sus centros en el eje radical del primer conjunto. Se mostrará en seguida que estas circunferencias ortogonales forman un conjunto coaxial.

Consideremos cualquier circunferencia del grupo que se interseca. Las tangentes desde su centro a las circunferencias que la intersecan ortogonalmente son sus radios y por lo tanto son iguales. De esta manera su centro tiene iguales potencias con respecto a las circunferencias ortogonales a ella, de lo que se sigue que las últimas son coaxiales, con la línea de los centros del otro conjunto como eje radical. Ninguna de estas circunferencias interseca su eje radical, y ningún par de circunferencias del conjunto se cortan entre sí.

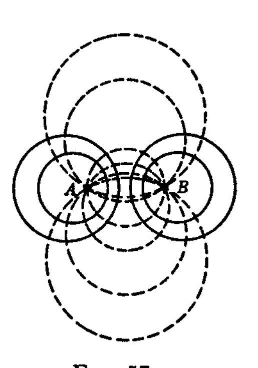
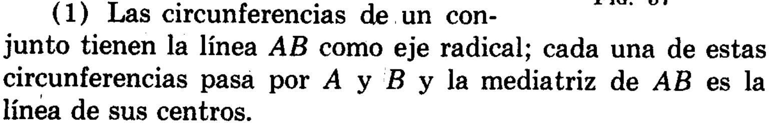


FIG. 57

Estos resultados pueden resumirse como sigue:

Sean A y B dos puntos diferentes en el plano. Entonces existen dos conjuntos de circunferencias coaxiales que tienen las siguientes propiedades:


(1) Las circunferencias de un conjunto tienen la línea AB como eje radical; cada una de estas circunferencias pasa por A y B y la mediatriz de AB es la línea de sus centros.

(2) Las circunferencias del otro conjunto que es del tipo sin intersecciones, tienen como eje radical la media-

triz de AB; los puntos A y B son los puntos límites; y la línea AB es la línea de los centros.

(3) Una y sólo una circunferencia de cada conjunto pasa por cada punto finito del plano distinto a A y B.

(4) Cada circunferencia de un conjunto interseca ortogonalmente todas las circunferencias del otro conjunto. Los dos conjuntos forman una *red ortogonal* de circunferencias en el plano.

6.12 Aplicación al cuadrilátero completo. Como una aplicación de la teoría de circunferencias coaxiales, probaremos el siguiente

TEOREMA: *Las circunferencias cuyos diámetros son las diagonales de un cuadrilátero completo, son coaxiales; los ortocentros de los cuatro triángulos determinados por los cuatro lados del cuadrilátero tomados tres a un tiempo son colineales, y los puntos medios de las diagonales son colineales.*

En el cuadrilátero completo de lados p, q, r, s (Fig. 58), sea H_1 el ortocentro del triángulo ABC y sean A', B', C' los pies de las alturas por A, B, C respectivamente. Puesto que A, C, C', A' y B, C, C', B' son conjuntos de puntos concíclicos,

$$H_1A \cdot H_1A' = H_1B \cdot H_1B' = H_1C \cdot H_1C'.$$

Ahora AA', BB', CC' son cuerdas de las circunferencias que tienen como diámetros a AF, BE y CD respectivamente y por las ecuaciones anteriores H_1 tiene la misma potencia con respecto a cada una de estas circunferencias. De la misma manera se puede demostrar que los ortocentros de los triángulos ADE, BDF, CEF tienen cada uno iguales potencias con respecto a estas tres circunferencias. Se sigue que las tres circunferencias son coaxiales; que los cuatro ortocentros están en el eje radical; y que sus centros, a saber, los puntos medios de las diagonales, están en una línea recta. Más aún, la línea en la cual están los cuatro ortocentros, es perpendicular a la línea que pasa por los puntos medios de las diagonales.

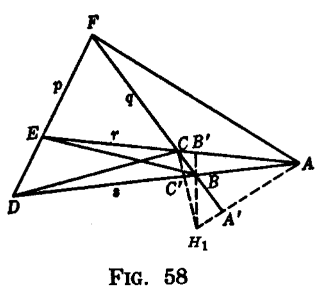


FIG. 58

EJERCICIOS

1. Dos circunferencias distintas dadas, son miembros de uno y sólo un conjunto de circunferencias coaxiales.

2. Los ejes radicales de una circunferencia dada y de las circunferencias de un conjunto coaxial son concurrentes.

3. Los puntos en los cuales una tangente común a dos circunferencias toca a éstas, son conjugados armónicos con respecto a los puntos en los cuales es cortada la tangente por cualquier circunferencia coaxial con ellas.

4. Demostrar que si cada dos puntos tienen iguales potencias con respecto a tres o más circunferencias, las circunferencias son coaxiales.

5. Estudiar el conjunto de circunferencias ortogonales a una circunferencia fija dada, y enumerar algunas de sus propiedades.

6. Dadas dos circunferencias, la suma de cuyos radios es menor que la longitud del segmento que une sus centros. Las cuatro circunferencias cuyos diámetros son sus cuatro tangentes comunes son coaxiales.

7. Dos circunferencias y su circunferencia de similitud son coaxiales.

8. Demostrar que el conjunto de todas las circunferencias tangentes a la misma línea en el mismo punto es un caso límite entre un sistema de circunferencias coaxiales que se intersecan y uno de circunferencias coaxiales ajenas.

9. Las circunferencias que son ortogonales a una circunferencia dada y cuyos centros son colineales, son coaxiales.

10. Construir una circunferencia de un conjunto coaxial dado que sea (*a*) tangente a una línea dada; (*b*) tangente a una circunferencia dada.

11. Los tres conjuntos de puntos límite de los sistemas de circunferencias coaxiales determinados por tres circunferencias que no se intersecan tomadas en pares son concíclicos.

12. En adición a las circunferencias mencionadas en el ejercicio 8 anterior, hay otros dos casos límite de circunferencias coaxiales, a saber, un conjunto de circunferencias que tengan un centro común, y un conjunto de líneas concurrentes. Estudiar todos los casos límite.

13. Si dos líneas por un punto común de circunferencias coaxiales que se intersecan, cortan tres de las circunferencias en P, Q, R y P', Q', R' respectivamente, entonces $PQ:QR = P'Q':Q'R'$.

14. El centro radical de tres circunferencias puede ser, o el centro de una circunferencia que corta a cada una de las tres ortogonalmente, o el centro de una circunferencia que es cortada por cada una de las tres en pares de puntos diametralmente opuestos.

15. Los centros radicales de cuatro circunferencias tomadas tres a un tiempo, siendo no colineales las tercias de centros, coinciden o son los vértices de un cuadrángulo completo. Interprete el caso cuando cada una de las circunferencias es una circunferencia nula.

16. Construir cuatro circunferencias cuyos centros radicales por tercias sean los cuatro puntos de un grupo ortocéntrico dado.

CAPITULO 7

INVERSION

7.1 Puntos inversos. Si P y P' son dos puntos colineales con el centro O de una circunferencia, cuyo radio es $r > 0$ de tal forma que $OP \cdot OP' = r^2$, cada uno de los puntos P y P' es *inverso* del otro con respecto a la circunferencia. El punto O es el *centro de inversión*, la circunferencia O *es la circunferencia de inversión*, y su radio es el *radio de inversión*.

La relación es simétrica, es decir, si P' es el inverso de P, entonces P es el inverso de P'. De acuerdo con esta simetría, se dice que los puntos P y P', son *puntos inversos* con respecto a la circunferencia. Los hechos siguientes son obvios:

Con respecto a una circunferencia dada:

(*a*) Cada punto en el plano excepto el centro, tiene un solo inverso.

(*b*) Un punto en la circunferencia de inversión es su propio inverso.

(*c*) De dos puntos inversos distintos, uno está dentro de la circunferencia de inversión y el otro fuera.

7.2 Curvas inversas. Sean P y P' dos puntos inversos con respecto a una circunferencia de centro O, y supongamos que P se mueve de tal forma que traza una curva cualquiera. Entonces P' también trazará una curva. Estas curvas son por definición una *inversa* de la otra; o se dice que son *mutuamente inversas.*

De esta manera el inverso de una circunferencia cuyo centro es el centro de inversión, es una circunferencia concéntrica con la circunferencia dada. En particular, si una circunferencia coincide con la circunferencia de inversión, es su propia inversa. Asimismo también es evidente, que una línea recta por el centro de inversión es su propia inversa.

Si dos curvas inversas se intersecan, todos sus puntos de

intersección, están en la circunferencia de inversión. Inversamente, si una de dos curvas inversas, interseca la circunferencia de inversión, la segunda interseca a ésta en el mismo punto.

7.3 Circunferencia que pasa por puntos inversos.

TEOREMA: *Cualquier circunferencia que pasa por un par de puntos inversos distintos, es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión; e inversamente, cualquier circunferencia que es ortogonal a la circunferencia de inversión es su propia inversa.*

Sean P y P' puntos inversos con respecto a la circunferencia de centro O, y PP' corte la circunferencia de inversión en A y A'. Entonces puesto que $OP \cdot OP' = \overline{OA}^2$, los puntos A y A' son conjugados armónicos con respecto a P y P'. De aquí, cualquier circunferencia por P y P' es ortogonal a la circunferencia O (Sección 4.10).

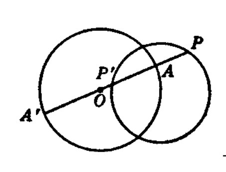


FIG. 59

Invirtiendo los pasos del razonamiento anterior, demostramos que, si una circunferencia dada es ortogonal a la circunferencia O, el inverso de cualquiera de sus puntos P con respecto a O, es el punto P' donde OP interseca nuevamente la circunferencia dada. Entonces, al recorrer P la circunferencia en que está, P' traza la misma circunferencia.

Podemos resumir algunos resultados de esta sección y de la anterior observando que las siguientes son sus propios inversos con respecto a una circunferencia dada de inversión:

(*a*) La circunferencia de inversión.

(*b*) Líneas rectas por el centro de inversión.

(*c*) Circunferencias ortogonales a la circunferencia de inversión.

7.4 El inverso de una línea recta.

TEOREMA: *El inverso de una línea recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia por el centro de inversión; y recíprocamente, el inverso de una circun-*

ferencia de radio finito, * *que pasa por el centro de inversión, es una línea recta que no pasa por el centro de inversión. Más aún, la línea recta es perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por el centro de inversión.*

Si A es el pie de la perpendicular desde el centro de inversión O sobre una línea dada y P es un punto cualquiera en la línea, los triángulos OPA y $OA'P'$ son inversamente semejantes; A' y P' son los inversos de A y P respectivamente. De esta manera el vértice P' del ángulo recto $OP'A'$ está en la circunferencia de diámetro OA'.

Inversamente si P' es un punto de esta circunferencia, se infiere, recorriendo al revés los pasos anteriores, que P está en la perpendicular a la línea del diámetro OA' que pasa por el inverso de A'.

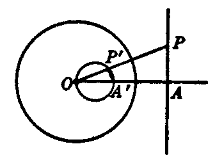


FIG. 60

Tenemos el siguiente

COROLARIO: *Líneas rectas paralelas, ninguna de las cuales pasa por el centro de una circunferencia de inversión, se invierten en circunferencias tangentes una a otra en el centro de inversión.*

7.5 **El inverso de una circunferencia.** Hemos determinado los inversos de todas las circunferencias por el centro de inversión, de todas las circunferencias puntuales, y de todas las circunferencias de radio infinito. La determinación de los inversos de las circunferencias restantes en el plano es señalada en el siguiente

TEOREMA: *El inverso de una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia de radio finito que no pasa por este punto.*

Sea P un punto cualquiera en la circunferencia A, cuya inversa con respecto a O es buscada, y sea Q la segunda intersección de OP con esta circunferencia. Por P' el inverso de P dibujamos una paralela de QA, que intersecta a OA en B.** Ahora puesto que $OP \cdot OP' = r^2$ y $OP \cdot OQ = k$, una cons-

* Por *radio finito,* entendemos un radio cuya longitud es un número distinto de cero. Una línea recta puede ser considerada como el caso límite de una circunferencia cuyo radio se incrementa indefinidamente. Desde este punto de vista, se habla algunas veces de una línea recta, como una *circunferencia de radio infinito.*

** Para que B sea el *único* punto determinado en la forma aquí descrita, es necesario que P no esté en la línea OA. Pero una vez determinado B, el argumento es válido, aunque P sea uno de los puntos en que OA interseca la circunferencia.

tante, la razón $\frac{OP'}{OQ}$ tiene un valor constante. Y puesto que

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OB}{OA} = \frac{BP'}{AQ},$$

se sigue que B es un punto fijo y que BP' es finito y constante; es decir el lugar geométrico de P' es una circunferencia de radio finito. También, puesto que ningún punto de

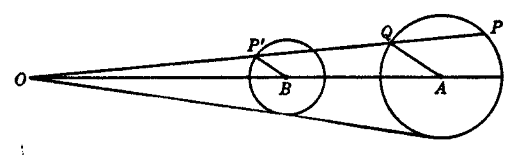


FIG. 61.

la circunferencia dada está al infinito, el lugar geométrico de P' no pasa por O.

Es evidente que el centro de inversión con respecto al cual las circunferencias A y B son curvas inversas, es un centro de homotecia de las dos circunferencias.

EJERCICIOS

1. Si P está fuera de la circunferencia de inversión, su inverso está en la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a la circunferencia desde P.

2. Si dos circunferencias que se intersecan son ortogonales a una tercera, sus puntos de intersección son colineales con el centro de la tercera circunferencia.

3. ¿Cuál es el inverso de la línea al infinito?

4. Si cuatro puntos armónicos son invertidos con respecto a cualquier punto distinto a los cuatro y en su línea, como centro de inversión, se obtienen cuatro puntos armónicos.

5. A es un punto en una circunferencia cuyo centro es C. El inverso de esta circunferencia con A como centro de inversión, interseca a AC en B. Si D es el inverso de C, entonces $AB = BD$.

6. Una figura consiste de las líneas completas de un cuadrado y sus dos diagonales. Estudiar la figura obtenida por inversión con uno de los vértices del cuadrado como centro de inversión.

7. Si un sistema de circunferencias coaxiales tiene puntos límites, son puntos inversos con respecto a cualquier circunferencia del sistema.

8. Una circunferencia, su inversa, y la circunferencia de inversión, son circunferencias de un conjunto coaxial.

9. Si una circunferencia es invertida en una circunferencia, ¿el centro de la primera es invertido en el centro de la segunda?

10. Cuál es el inverso de un conjunto de circunferencias coaxiales que se intersecan, con respecto a:

(*a*) Uno de sus puntos comunes.

(*b*) Cualquier punto en el eje radical.

(*c*) Cualquier punto en el plano fuera del eje radical.

11. Cuál es el inverso de un conjunto de circunferencias coaxiales que no se intersectan, con respecto a:

(*a*) Cualquier punto en el eje radical.

(*b*) Cualquier punto en el plano fuera del eje radical.

12. Identifique el inverso de una circunferencia circunscrita a un triángulo con respecto a la circunferencia inscrita como circunferencia de inversión.

13. Si P, P' y Q, Q' son pares de puntos inversos respecto a una circunferencia de centro O, y si no están todos ellos en la misma línea recta:

(*a*) Los triángulos OPQ y $OP'Q'$ son inversamente semejantes.

(*b*) Los puntos P, P', Q, Q' están en una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión.

14. Dos puntos inversos y los puntos en los cuales la línea determinada por ellos interseca la circunferencia de inversión, constituyen una hilera armónica.

15. Si una figura se invierte con respecto a dos circunferencias concéntricas distintas de inversión, las figuras inversas son homotéticas con el centro de inversión como centro de similitud.

16. El inverso de un conjunto de líneas paralelas, es un conjunto de circunferencias coaxiales. Describa en forma más completa este conjunto de circunferencias coaxiales. Cuál es el inverso del conjunto asociado de circunferencias coaxiales cuyos miembros cortan las del primer conjunto ortogonalmente.

7.6 Angulos conservados por la inversión.

TEOREMA: *Si dos curvas se intersecan en un punto cualquiera distinto del centro de inversión, su ángulo de intersección en ese punto es igual en magnitud pero opuesto en signo al ángulo de intersección de las curvas inversas en el punto inverso.*

Sean las curvas que se intersecan en P, un punto distinto de O el centro de inversión. Tracemos OP y una segunda línea por O que corte las líneas dadas en Q y R. Si P', Q', R' son los inversos de P, Q, R, entonces las inversas de las curvas PQ y PR son curvas que pasan por P', Q' y P', R' respectivamente (Fig. 62).

Puesto que $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$, PQ es antiparalela a $P'Q'$ con respecto a OP y OQ, y de aquí

$$\angle QPO = \angle OQ'P'.$$

Fig. 62.

Similarmente

$$\angle\, RPO = \angle\, OR'P';$$

y por substracción

$$\angle\, QPR = -\angle\, Q'P'R'.$$

Ahora si la línea OQ gira alrededor de O de tal forma que siempre corte las cuatro curvas, y tienda a OP como límite, los ángulos QPR y $Q'P'R'$, tienden en el límite a ser los ángulos de intersección de las curvas. Así los ángulos de intersección son iguales en magnitud, pero opuestos en signo.

La propiedad de las curvas respecto de la inversión, incluida en el teorema anterior, se expresa algunas veces diciendo que las curvas inversas son *isogonales*, y también diciendo que los ángulos son conservados por la inversión.

Como corolario se infiere, que si dos curvas son tangentes una a la otra en P, sus inversas son tangentes una a la otra en P'.

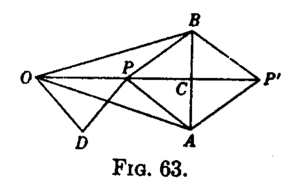


Fig. 63.

7.7 Celda de Peaucellier. Un sistema mecánico articulado conocido como celda de Peaucellier, puede ser usado para construir el inverso de una curva dada.

Unamos los puntos A y B del rombo $PAP'B$ al punto fijo O por medio de líneas iguales OA y OB $(OA > PA)$. Entonces, si todas las partes pueden moverse libremente, con excepción del punto O, los puntos P y P' describirán curvas inversas con respecto a O como centro y r como radio de inversión, donde $r^2 = \overline{OA}^2 - \overline{PA}^2$. Si llamamos C el punto de intersección de PP' y AB y si observamos que O, P y P' son colineales, tenemos

$$\begin{aligned} OP\cdot OP' &= (OC - PC)(OC + PC) \\ &= \overline{OC}^2 - \overline{PC}^2 \\ &= \overline{OC}^2 + \overline{CA}^2 - (\overline{PC}^2 + \overline{CA}^2) \\ &= \overline{OA}^2 - \overline{PA}^2 \end{aligned}$$

y de aquí, P y P' en todas sus posiciones son puntos inversos. Así, por ejemplo, si P describe un arco de circunferen-

cia que pase por O, P' describirá un segmento de línea recta.

Si los lados del rombo y las líneas OA y OB son substituidos por barras rígidas articuladas en sus puntos de intersección, y si una barra adicional $DP = DO$ une el punto fijo D y el punto móvil P, entonces, cuando DP gira alrededor de D, P' describirá un segmento de línea recta.

La celda de Peaucellier es de interés porque es uno de los primeros métodos inventados para trazar una línea recta sin uso de regla.

7.8 **Teorema de Feuerbach.** Como un ejemplo de la potencia y belleza del método de inversión, lo usaremos para probar la propiedad de la circunferencia de los nueve puntos enunciada sin prueba al final de la Sección 5.6.

TEOREMA: *La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias excritas del triángulo.*

Probaremos que la circunferencia inscrita I (Fig. 64) y una de las circunferencias excritas I' del triángulo ABC son tangentes a la circunferencia de los nueve puntos. Dibujemos la tangente interior común $B'C'$ y sea A' su intersección con BC. Entonces A y A' son los centros de similitud de las dos circunferencias, y son conjugados armónicos con respecto a I e I'. Y puesto que $I'X'$, IX y AD son perpendiculares cada

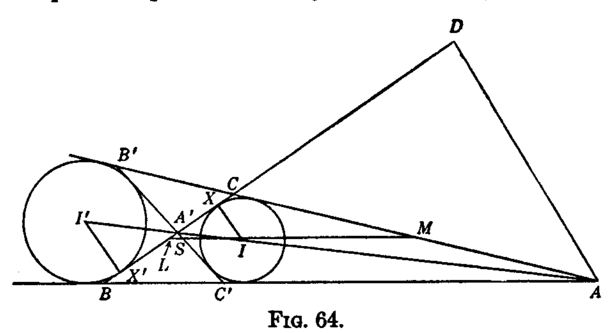


FIG. 64.

una a BC, se sigue que X', X, A', D son puntos armónicos. Ahora bien, L, el punto medio de BC, es también el punto medio de $X'X$. Por lo tanto, con respecto a L como centro y LX como radio de inversión, A' y D son puntos inversos.

En seguida demostraremos que, con respecto a esta misma circunferencia, S y M son también puntos inversos, donde S es la intersección de $B'C'$ y LM. Ahora

$$X'X = BC - 2\cdot XC = a - 2(s - c) = c - b,$$

entonces el radio de inversión es $\frac{c-b}{2}$. También $LM = \frac{c}{2}$. Para calcular LS, observamos que es la diferencia entre LM y SM, y que SM puede ser obtenido de la consideración de los triángulos semejantes $B'SM$ y $B'C'A$. Esto es

$$SM = \frac{C'A\cdot B'M}{B'A} = \frac{CA(BA - MA)}{BA} = \frac{2bc - b^2}{2c},$$

de donde

$$LS = \frac{c}{2} - \frac{2bc - b^2}{2c} = \frac{(c-b)^2}{2c}.$$

De aquí el producto $LS \cdot LM = \frac{(c-b)^2}{4}$, y los puntos S y M son inversos con respecto a la circunferencia de diámetro $X'X$.

El inverso de la línea $B'C'$ es una circunferencia por L, el centro de inversión, y los puntos D y M. Pero esta es la circunferencia de los nueve puntos. Puesto que las circunferencias I e I' son ortogonales cada una a la circunferencia de inversión, son sus propias inversas.

Del hecho de que si dos curvas son tangentes una a la otra, sus inversas son también tangentes una a la otra, se sigue que la circunferencia de los nueve puntos es tangente a las circunferencias I e I'. De la misma manera se puede demostrar que es tangente a cada una de las circunferencias excritas del triángulo.

7.9 Inversión de un teorema. Por medio de la inversión podemos deducir y probar nuevos teoremas, de teoremas ya conocidos. Este proceso se llama inversión de un teorema. Será ilustrado en el siguiente ejemplo.

Dos circunferencias S y S' se intersecan en los puntos distintos A y O. Los diámetros EO y FO de S' y S intersecan S y S' en B y C respectivamente. Entonces el eje radical AO pasa por el centro de la circunferencia S'' determinada por O, B y C.

Inviértase la figura con O como centro de inversión, y sean A', B', C' los inversos de A, B, C respectivamente. Por conveniencia se da una segunda figura con los resultados de esta inversión. Cada una de las líneas AO, FO y EO se

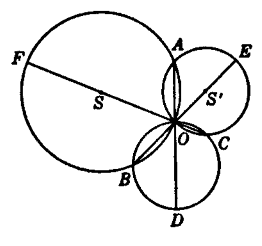


FIG. 65*a*

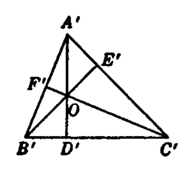


FIG. 65*b*

invierte en sí misma, mientras que las circunferencias S, S' y S'' se invierten en $A'B'$, $A'C'$ y $B'C'$ respectivamente. Más aún, puesto que un diámetro interseca su circunferencia ortogonalmente, $B'O$ y $C'O$, son por la propiedad isogonal de la inversión, alturas del triángulo $A'B'C'$; de aquí $A'O$ es perpendicular a $B'C'$. Por lo tanto, AO es ortogonal a la circunferencia S'', de lo que se sigue que pasa por el centro de S''.

De un teorema familiar referente a las alturas de un triángulo, obtuvimos por inversión el teorema anterior referente a circunferencias. Este método es muy fructífero y frecuentemente proporciona pruebas simples de teoremas cuya prueba por otro método es más difícil.

7.10 Circunferencia de antisimilitud. Una *circunferencia de antisimilitud* de dos circunferencias es una circunferencia respecto a la cual las dos son mutuamente inversas.

Hemos visto, que si dos circunferencias son mutuamente inversas, el centro de inversión es el centro de similitud de las circunferencias. También, cualquier par de puntos inversos son antihomólogos con respecto a este centro de similitud. Entonces vemos que dos circunferencias pueden tener, cuando más, dos circunferencias de antisimilitud.

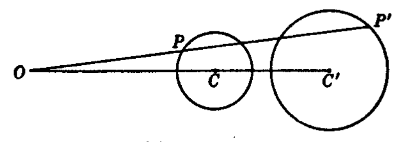


FIG. 66*a*

Si dos circunferencias no se intersecan (Figs. 66 *a, b*), los segmentos que unen O, un centro de similitud, a un par de puntos antihomólogos P y P' tienen el mismo signo para uno solo de los dos centros de similitud. Si las circunferencias son mutuamente excluyentes, el centro es externo, mientras que si una está contenida dentro de la otra, el centro es inter-

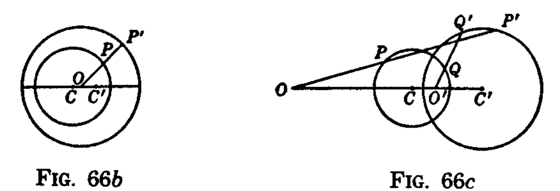


FIG. 66*b* FIG. 66*c*

no, de donde los dos segmentos tienen el mismo signo. De aquí, en este caso hay una sola circunferencia de antisimilitud, y su radio r, está dado por $r^2 - OP \cdot OP'$. Obviamente hay solamente una circunferencia así cuando las dos circunferencias son tangentes una a la otra. Cuando las dos circunferencias se intersecan (Fig. 66 *c*), cada uno de los centros de similitud llena los requisitos de un centro de inversión y hay dos circunferencias de antisimilitud. Cada una de éstas pasa por los puntos comunes a las circunferencias dadas.

Estos resultados pueden resumirse en el

TEOREMA: *Dos circunferencias que se intersecan tienen dos circunferencias de antisimilitud cuyos centros son los centros de similitud de las circunferencias dadas y cada una de las cuales pasa por los puntos comunes de las circunferencias dadas. Dos circunferencias tangentes una a otra o que no se intersecan tienen una circunferencia de antisimilitud cuyo centro es su centro interno o externo de similitud de acuerdo si las circunferencias son mutuamente excluyentes o si una está contenida dentro de la otra.*

7.11 Inversión de circunferencias en circunferencias iguales.

TEOREMA: *Dos circunferencias pueden siempre ser invertidas en dos circunferencias iguales.*

LEMA: *Si una circunferencia y dos puntos inversos respecto a ella se invierten con cualquier punto de la cir-*

cunferencia como centro de inversión, se transforman en una línea recta y dos puntos simétricos respecto a la línea.

Sean P y P' puntos inversos respecto a la circunferencia C, e invirtamos con un punto arbitrario O de la circunferencia C, como centro de inversión. Entonces la circunferencia C se transforma en una línea recta, la línea PP' en una circunferencia ortogonal a esta línea y la circunferencia con PP' como diámetro en una segunda circunferencia ortogonal a la misma línea. Entonces los transformados de P y P' son los puntos de intersección de dos circunferencias cuyos centros están en la línea que es la transformada de C, y son simétricos respecto a la línea.

Para demostrar el teorema, inviértanse las dos circunferencias dadas, con cualquier punto de la circunferencia de antisimilitud como centro de inversión. Esta circunferencia es transformada en una línea recta respecto a la cual los transformados de todos los pares de puntos correspondientes de las circunferencias dadas son simétricos. Se sigue que las circunferencias dadas están invertidas en circunferencias iguales.

Estamos ahora en posición de responder la pregunta, cuándo es posible, por inversión, transformar tres circunferencias dadas en tres circunferencias iguales. Si las circunferencias de antisimilitud de dos pares de circunferencias dadas se intersecan, tal transformación puede ser realizada. Una discusión completa demuestra que hay cuando más ocho de tales puntos de intersección, pero en algunos casos no hay ninguno. Cuando cada una de estas circunferencias interseca a las otras dos, la transformación es posible.

7.12 Inversión de circunferencias en sí mismas.

TEOREMA: *Cualquier par de circunferencias no concéntricas pueden ser invertidas en sí mismas en una infinidad de formas.*

Si tomamos como circunferencia de inversión cualquier circunferencia ortogonal a cada una de las circunferencias dadas, estas circunferencias son invertidas en sí mismas. Siempre existe un número infinito de circunferencias ortogonales a cada una de las circunferencias no concéntricas (Sección 6.5), y por lo tanto la inversión es posible en un número infinito de formas.

Tres circunferencias pueden ser invertidas en sí mismas, si existe una circunferencia ortogonal a las tres. Este es el caso cuando el centro radical es un punto finito que está fuera de las circunferencias dadas.

7.13 Circunferencias que intersecan una circunferencia dada en un ángulo dado.

PROBLEMA: *Construir una circunferencia que pase por dos puntos dados y que corte una circunferencia dada en un ángulo dado.*

Sean C la circunferencia y A y B los puntos dados. Si invertimos con respecto a la circunferencia de centro A y que es ortogonal a C, la última se invierte en sí misma y la circunferencia requerida se invierte en una línea recta que pasa por B', el inverso de B. También esta línea intersecará la circunferencia C en el ángulo dado. Ahora; todas las líneas que cortan la circunferencia C bajo este ángulo son tangentes a la circunferencia C' que es concéntrica con C y que se construye fácilmente. De aquí queda solamente por dibujar por B' una tangente a la circunferencia C' e invertir esta tangente en la circunferencia requerida. Hay dos soluciones, una, o ninguna, según B' esté fuera, sobre, o dentro de la circunferencia C'.

EJERCICIOS

1. Una circunferencia y un par de puntos inversos con respecto a ella, se invierten en una circunferencia y en un par de puntos inversos con respecto a la última.

2. Si dos circunferencias son ortogonales, el inverso del centro de una u otra con respecto a la otra circunferencia es el punto medio de la cuerda común.

3. Si dos curvas son mutuamente inversas, una tangente a una de ellas desde el centro de inversión es también tangente a la otra.

4. Dos circunferencias son invertidas con respecto a cualquier punto. Discuta ampliamente el inverso de la línea de sus centros.

5. Invierta el teorema: *Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto,* tomando uno de los extremos del diámetro que subtiende el ángulo recto como centro de inversión.

6. Invierta con respecto a A el teorema: *Si A, B, C, D son cuatro puntos concíclicos, los ángulos ABD, ACD son iguales o suplementarios.*

7. Probar que las circunferencias que tienen como diámetros las tres cuerdas AB, AC, AD de una circunferencia dada, se intersecan por pares en tres puntos colineales.

8. Si un par de circunferencias tienen dos circunferencias de antisimilitud, las últimas son ortogonales.

9. Encontrar la circunferencia de antisimilitud de dos circunferencias concéntricas.

10. Demostrar que tres circunferencias cualesquiera pueden ser invertidas en tres circunferencias cuyos centros estén en una línea recta. ¿Es posible invertirlos de manera que sus centros se encuentren en una línea recta dada?

11. Tres circunferencias con un punto en común, y sus circunferencias de antisimilitud, pueden ser invertidas en un triángulo y las bisectrices de sus ángulos.

12. Tres circunferencias con un punto en común se intersecan en pares. Sus seis circunferencias de antisimilitud se intersecan en cuatro puntos por tercias.

13. Cuatro puntos no concíclicos pueden ser invertidos en un grupo ortocéntrico de puntos.

14. Cualquier par de circunferencias que no se corten pueden ser invertidas en dos circunferencias concéntricas.

15. P y P' son puntos inversos con respecto a una circunferencia dada y AB es una cuerda de esta circunferencia que pasa por P. Demostrar que el ángulo $AP'B$ es bisecado por PP'.

16. En el lema de la Sección 7.11 considere estos casos especiales: (1) O está en la línea PP'; (2) O está en la circunferencia de la cual PP' es un diámetro.

17. Si tres circunferencias se intersecan una a otra, es posible invertirlas en tres circunferencias iguales. Enuncie otro caso especial en que tal transformación sea posible. Enuncie algunos casos en los cuales no sea posible.

18. Si tres circunferencias son invertidas en sí mismas, ¿qué transformaciones sufren las líneas de sus centros?

19. Demostrar que si una circunferencia corta a dos circunferencias ortogonalmente, puede obtenerse como la inversa de la línea de sus centros.

20. Si los puntos A y B tienen como inversos a A' y B', entonces AA' y BB' son antiparalelos con respecto a AB y $A'B'$.

21. Los puntos P y P' son inversos con respecto a una circunferencia dada. Demostrar que la razón de AP a AP' es constante siendo A un punto cualquiera en la circunferencia de inversión.

22. El inverso del centro de una circunferencia dada, es el inverso del centro de inversión con respecto a la circunferencia, la cual es inversa a la circunferencia dada.

23. A, B, C, D son cuatro puntos colineales, y A', B', C', D' son sus inversos con respecto a cualquier centro de inversión. Demostrar que

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{A'B' \cdot C'D'}{A'C' \cdot B'D'}.$$

24. A, B, C, D son cuatro puntos concíclicos tales que C y D están separados por A y B. Si p_1, p_2, p_3 son las longitudes de las perpen-

diculares desde D a las líneas AB, BC, CA, respectivamente, demostrar que

$$\frac{AB}{p_1} = \frac{BC}{p_2} + \frac{CA}{p_3}.$$

25. Una figura consiste en un triángulo y sus alturas, de las circunferencias que tienen como diámetro los lados del triángulo, y de las circunferencias que tienen como diámetros los segmentos que unen los vértices al ortocentro. Construir y describir el inverso de esta figura con respecto a la circunferencia de los nueve puntos como circunferencia de inversión.

26. Con varios puntos como centro de inversión, invierta el teorema: *La línea de los centros de dos circunferencias que se intersecan es perpendicular a su cuerda común.*

27. Demostrar que si A, B, C, D son cuatro puntos tales que AB y CD sean antiparalelas con respecto a AD y BC, los cuatro puntos pueden ser invertidos en los vértices de un rectángulo.

28. Por el método de inversión, construir una circunferencia que pase por un punto dado y que sea tangente a dos circunferencias dadas.

29. Construir una circunferencia que pase por un punto dado y que corte dos circunferencias bajo ángulos dados.

30. Demostrar que es posible invertir los vértices de un triángulo en los vértices de un triángulo semejante a un triángulo dado.

CAPITULO 8

POLOS Y POLARES

8.1 Definiciones. Sean P y P' dos puntos inversos cualesquiera con respecto a una circunferencia dada de centro O. La línea p que pasa por P' y que es perpendicular a PP' es la *línea polar de P* o simplemente la *polar de P* con respecto a la circunferencia. También el punto P es llamado el *polo* de la línea p.

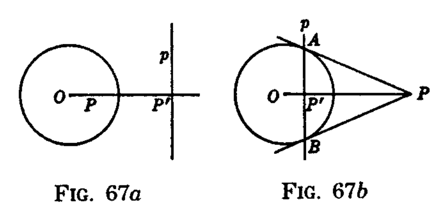


FIG. 67*a* FIG. 67*b*

Es evidente que la polar de un punto interseca la circunferencia, es tangente a la circunferencia en el punto, o no interseca a la circunferencia, de acuerdo con que el punto esté fuera, en, o dentro de la circunferencia.

Cuando P está fuera de la circunferencia, se pueden dibujar dos tangentes de él a la circunferencia. Si A y B son los puntos de contacto de estas tangentes, la línea AB es la cuerda de contacto del punto P. Es fácil demostrar que la cuerda de contacto de un punto exterior es la polar de ese punto con respecto a la circunferencia.

La polar del centro de la circunferencia se define como la línea al infinito, y el polo de un diámetro es un punto al infinito. Con respecto a una circunferencia dada, la relación polo y polar, establecen una correspondencia biunívoca entre todos los puntos y todas las líneas del plano.

8.2 Teorema fundamental.

TEOREMA: *Si con respecto a una circunferencia dada, la polar de P pasa por Q, entonces la polar de Q pasa por P.*

Por hipótesis, la perpendicular a OP en P', el inverso de P, pasa por Q. Si ahora Q' es el inverso de Q, las líneas PQ' y $P'Q$, son antiparalelas con respecto a OP y OQ, y entonces PQ' es perpendicular a OQ; es decir, la polar de Q pasa por P.

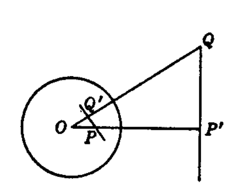


Fig. 68

Tenemos también el

Corolario: *Si p y q son líneas tales que, con respecto a una circunferencia dada, el polo de p está en q, entonces el polo de q está en p.*

Se concluye que las polares de una hilera son las líneas de un haz y que los polos de las líneas de un haz son los puntos de una hilera.

Dos puntos que tienen la propiedad de que la polar de uno pasa por el otro, son *puntos conjugados;* y dos líneas, que sean de modo que el polo de cada una esté en la otra, son *líneas conjugadas*. Cada punto de una línea dada, tiene un punto conjugado en tal línea, a saber, el punto en el cual la línea es cortada por la polar del punto. Asimismo, cada línea por un punto dado, tiene una línea conjugada por ese punto.

Lo siguiente es obvio:

(*a*) De dos puntos conjugados distintos en una línea que corte la circunferencia, uno está dentro y el otro está fuera de la circunferencia.

(*b*) De dos líneas distintas conjugadas que se corten fuera de la circunferencia, una corta la circunferencia y la otra no.

(*c*) Cualquier punto en la circunferencia es conjugado de todos los puntos de la tangente en ese punto.

(*d*) Cualquier tangente a la circunferencia es conjugada a todas las líneas por su punto de contacto.

8.3 Relaciones armónicas. La teoría de polos y polares, está íntimamente relacionada con la teoría de división armónica. Algunas de estas relaciones se indican en los teoremas que siguen.

Teorema: *Si, con respecto a una circunferencia dada, dos puntos conjugados están en una línea que interseca la circunferencia, están separados armónicamente por los puntos de intersección.*

Sean A y B dos de tales puntos (Fig. 69) y sea A' el inverso de A. Entonces $A'B$ es la polar de A. Puesto que la circunferencia con AB como diámetro, pasa por A', es ortogonal a la circunferencia dada y A y B están armónicamente separados por los puntos en los cuales su línea interseca la circunferencia.

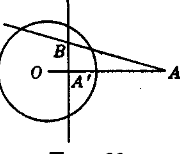


Fig. 69

Hemos visto entonces, que si una línea variable por un punto dado, interseca una circunferencia, los conjugados armónicos del punto con respecto a las intersecciones de la línea y la circunferencia, están todos en la polar del punto.

TEOREMA: *Si, con respecto a una circunferencia dada, dos líneas conjugadas se corten fuera de dicha circunferencia, están separadas armónicamente por las tangentes desde su punto de intersección.*

Sean a y b líneas conjugadas que se intersecan en S, un punto fuera de la circunferencia, y sean las tangentes p y q trazadas de S a la circunferencia, siendo los puntos de tangencia P y Q (Fig. 70). También la línea PQ interseca a a y b en los puntos A y B.

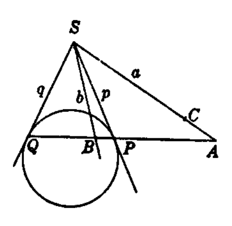


Fig. 70

Entonces PQ, la polar de S, pasa a través de B, y por lo tanto la polar de B pasa por S. También, puesto que el polo de b es un punto C en a, la polar de C pasa por B y consecuentemente, la polar de B pasa por C. Ahora, como S está en b, C es distinto de S. Por lo tanto a es la polar de B, A y B son puntos conjugados, la hilera $ABPQ$ es armónica, y el haz a,b,p,q, es armónico.

TEOREMA: *Si cuatro puntos en una línea son armónicos, sus polares con respecto a una circunferencia dada también son armónicos.*

Sean A, B, C, D los puntos armónicos dados (Fig. 71). Sus polares a, b, c, d, pasan por S, el polo de la línea en la cual están estos puntos. Y como cada polar es perpendicular a la línea que une su polo con el centro de la circunferencia, el ángulo entre dos líneas cualesquiera del haz

$O(ABCD)$ es igual al ángulo entre las líneas correspondien-tes del haz, a, b, c, d. Se infiere que el haz es armónico.

8.4 Relación con un cuadrángulo inscrito. Sean A, B, C, D los vértices de un cuadrángulo completo inscrito en una circunferencia, y supongamos que los pares de lados opues-

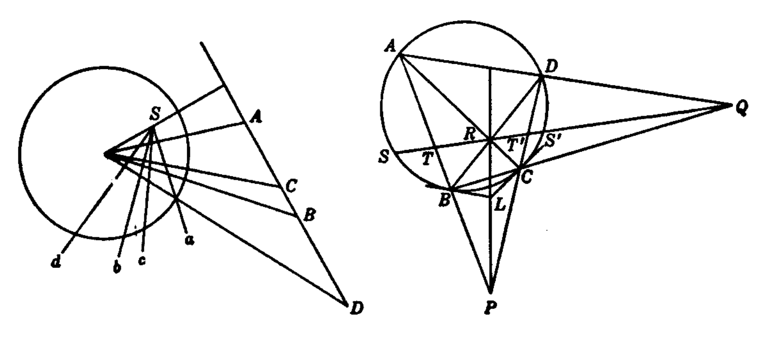


FIG. 71 FIG. 72

tos se intersecan en los puntos P, Q, R como se indica en la Fig. 72. Como el haz $P(TT'RQ)$ es armónico, la línea PR interseca a BC en el conjugado armónico, de Q con respecto a B y C. Asimismo interseca a AD en el conjugado de Q con respecto a A y D. Por lo tanto, PR es la polar de Q. Análogamente QR es polar de P; y por el teorema fundamental PQ es la polar de R. Así cada lado del triángulo diagonal es la polar de vértice opuesto. También Q y R están separados armónicamente por los dos pares de puntos S, S' y T, T'.

Más aún si se trazan tangentes en B y C, su punto de intersección L está en PR. Puesto que la polar de L es BC y pasa por Q. De aquí PR, la polar de Q, pasa por L. De manera similar las tangentes por dos vértices cualesquiera del cuadrángulo se intersecan en la **polar del vértice del triángulo diagonal que está en el lado que pasa a través de los puntos de tangencia.**

De aquí obtenemos el

TEOREMA: *Si los vértices de un cuadrángulo completo están en una circunferencia, y los lados de un cuadrilátero completo son tangentes a la circunferencia en los vértices del cuadrángulo, los seis vértices del cuadrilátero están por pares en los lados del triángulo diagonal del cuadrángulo.*

El lector deberá dibujar una figura para ilustrar este teorema.

Una construcción lineal para la polar de un punto P que no está en la circunferencia, es una consecuencia de las relaciones presentadas arriba. Por P trazamos dos secantes, una de las cuales corta la circunferencia en A y B, la otra en C y D. Si Q es la intersección de AD con BC, y R la intersección de AC con BD, entonces QR es la línea buscada.

Si P está en la circunferencia, su polar, es decir, la tangente en P, puede ser construida con regla solamente. Para hacer esto trazamos cualquier secante por P, determinamos Q, su polo y trazamos PQ, que es la línea buscada.

8.5 **Principio de dualidad.** Se dijo al final de la Sección 8.1 que por medio de la relación de polos y polares con respecto a una circunferencia, se establece una correspondencia biunívoca entre todos los puntos y todas las líneas del plano. Estamos ahora en condiciones de ver lo que el principio de dualidad produce en esta relación. (Sección 4.13.)

Desde el punto de vista de dualidad, una curva puede ser vista, por un lado como un conjunto de puntos, y por otro como un conjunto de líneas, a saber, la familia de líneas de la cual la curva es la envolvente. Así, *punto en una curva* y *línea tangente a una curva*, son elementos duales, y a cualquier teorema proyectivo que incluya uno o ambos de estos elementos, le corresponde un segundo teorema, que es su dual.

La discusión de la sección anterior, indica que toda la teoría de polos y polares, puede ser referida a la teoría de cuadrángulos completos inscritos y cuadriláteros completos circunscritos, de modo de librarla completamente de relaciones métricas. Cuando esto se realiza, es palpable que la dualidad mencionada anteriormente, existe, que el dual de un punto es su línea polar y que el dual de una línea es el polo de dicha línea. Así por ejemplo, el teorema y el corolario de la Sección 8.2, son duales el uno del otro. El lector deberá examinar todas las discusiones que siguen refiriéndose al principio de dualidad.

8.6 **Triángulo autopolar.** Un triángulo es autopolar o *autoconjungado* con respecto a una circunferencia, cuando cada vértice es el polo del lado opuesto. Las siguientes pro-

piedades de un triángulo autopolar, cuyos vértices son todos puntos finitos, pueden ser fácilmente demostradas.

(*a*) Su ortocentro es el centro de la circunferencia.

(*b*) Uno y sólo uno de sus vértices está dentro de la circunferencia.

(*c*) El ángulo del triángulo cuyo vértice está dentro de la circunferencia es obtuso.

Un triángulo autopolar puede ser construido tomando un vértice arbitrariamente, un segundo vértice en la polar del primero, y el tercero en la intersección de las polares de los otros dos.

8.7 Circunferencia polar. Hay un número infinito de triángulos autopolares con respecto a una circunferencia dada, sin embargo, hay cuando más una circunferencia respecto a la cual un triángulo dado sea autopolar. Para que exista una tal circunferencia, el triángulo debe ser obtusángulo. Cuando tal circunferencia existe, se llama *circunferencia polar del triángulo.*

La circunferencia polar del triángulo obtusángulo ABC, puede ser construida, dibujando la circunferencia de centro en O y cuyo radio es la media proporcional de OA y OD, donde O es el ortocentro del triángulo y D es el pie de la altura por A.

Puesto que un vértice del triángulo y el pie de la altura que pasa por él, son inversos con respecto a la circunferencia polar, cualquier circunferencia que tenga una altura del triángulo como cuerda es ortogonal a la circunferencia polar del triángulo. Ejemplos particulares de tales circunferencias, ortogonales a la circunferencia polar, son las circunferencias con los lados del triángulo como diámetros.

8.8 Circunferencias polares de triángulos de un grupo ortocéntrico. Tres de los cuatro triángulos de un grupo ortocéntrico son obtusángulos. En la Fig. 74, el cuadrángulo

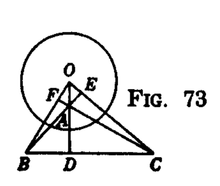


FIG. 73

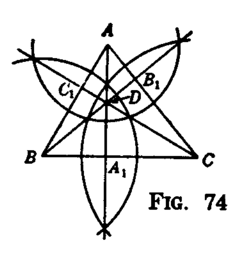


FIG. 74

del grupo es tal que los triángulos DAB, DBC, y DCA son obtusángulos en D. Sean r_1, r_2, y r_3 los radios de las circunferencias polares C, A, B de estos triángulos respectivamente. Entonces

$$r_3^2 = BA_1 \cdot BC,$$
$$r_1^2 = A_1C \cdot BC,$$

y

$$r_3^2 + r_1^2 = (BA_1 + A_1C) \cdot BC = \overline{BC}^2,$$

demostrando que las circunferencias B y C son ortogonales.

Puesto que A_1 y C son puntos inversos con respecto a la circunferencia B, A_1A es la polar de C referente a tal circunferencia y es fácil ver que pasa por los puntcs comunes a las circunferencias B y C.

De aquí tenemos el

TEOREMA: *Las circunferencias polares de los tres triángulos obtusángulos de un grupo ortocéntrico son ortogonales en pares, y sus puntos de intersección están en los tres lados del cuadrángulo que pasan por el vértice común de los ángulos obtusos.*

EJERCICIOS

1. Describa la naturaleza de la correspondencia entre los puntos de un plano y sus conjugados polares con respecto a una circunferencia dada.

2. Si dos puntos son conjugados con respecto a una circunferencia dada, sus polares también son conjugadas con respecto a la circunferencia.

3. Dados tres puntos que están en línea recta. Construir la polar de un cuarto punto con respecto a la circunferencia determinada por los tres, sin dibujar la circunferencia o cualquier arco de ella.

4. Trazar la tangente a una circunferencia en un punto dado de ella, usando regla únicamente.

5. Si un cuadrilátero completo se circunscribe a una circunferencia, su triángulo diagonal es autopolar respecto a la circunferencia.

6. Si un triángulo tiene circunferencia polar, el inverso de uno de sus lados con respecto a la circunferencia polar, es la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une el vértice opuesto con el ortocentro.

7. P y P' son puntos variables en las líneas rectas fijas l y l' respectivamente, tales que el segmento PP' subtiende desde un punto fijo O un ángulo constante. Demostrar que el lugar geométrico del polo de

PP' con respecto a una circunferencia cualquiera de centro O es una circunferencia.

8. Encontrar el lugar geométrico de un punto cuyas polares con respecto a dos circunferencias dadas forman un ángulo fijo entre ellas.

9. El inverso de una circunferencia circunscrita a un triángulo obtusángulo, con respecto a su circunferencia polar es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo.

10. P y P' son puntos variables en una circunferencia fija tales que el ángulo PAP' es bisecado por el diámetro que pasa por un punto fijo exterior A. Demostrar que la línea PP' pasa por un punto fijo.

11. H es el ortocentro del triángulo obtusángulo ABC, con el ángulo obtuso en A, y AD, BE y CF de alturas. Si la circunferencia polar corta el lado AC en P y Q, demostrar que H, F, P, D, B y Q son concíclicos.

12. Si un par de vértices opuestos de un cuadrado son puntos conjugados con respecto a una circunferencia, los otros vértices también son conjugados.

13. Una tangente común a dos circunferencias toca a éstas en P y Q respectivamente. Demostrar que P y Q son puntos conjugados con respecto a cualquier circunferencia coaxial.

14. Para completar los detalles de la Sección 8.8, demostrar que tres de los cuatro triángulos de un grupo ortocéntrico son obtusángulos y que los tres ángulos obtusos tienen un vértice común.

15. Dado un punto y una línea, encontrar una circunferencia respecto a la cual ellos sean polo y polar. Discuta la unicidad de la construcción.

16. Si desde dos puntos en una línea recta dada, se trazan tangentes a una circunferencia, demostrar que uno de los puntos diagonales del cuadrángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia, es polo de la línea dada.

17. En el Ejercicio 16, ¿qué líneas son las polores de los otros dos puntos diagonales?

18. Dada una circunferencia y dos líneas cuyo punto de intersección es inaccesible. Dibujar las tangentes a la circunferencia que pasan por el punto inaccesible usando únicamente regla.

CAPITULO 9

RAZON CRUZADA

9.1 Definiciones. Hemos considerado cuatro puntos colineales A, B, C, D cuyas posiciones son tales que el segmento AB está dividido por C y D en razones cuya razón tiene el valor -1. Cuando los puntos están así situados, A y B están separados armónicamente por C y D.

Si estos cuatro puntos tienen posiciones cualquiera en la línea en que están, esta razón de razones

$$\frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB}$$

es llamada *razón cruzada* de los cuatro puntos A, B, C, D y la señalaremos con el símbolo $\{ABCD\}$.

También, si OA, OB, OC, OD son cuatro líneas concurrentes, O un punto finito,* su razón cruzada es

$$\frac{\text{sen}\, AOC}{\text{sen}\, COB}\Big/\frac{\text{sen}\, AOD}{\text{sen}\, DOB},$$

y será denotada por $O\{ABCD\}$. Asimismo $\{abcd\}$ indica la razón cruzada de cuatro líneas concurrentes a, b, c, d.

Los términos *razón anarmónica* y *razón doble* son usados como sinónimos de razón cruzada. De estas dos la primera es más frecuente, pero razón cruzada es la más usada de las tres.

Si cuatro elementos, son armónicos, sus razones cruzadas tienen el valor -1, e inversamente.

Es fácil verificar que si A, B, C, son tres puntos distintos colineales

$$\{ABCC\} = 1; \ \{ABCB\} = 0; \quad \text{y} \quad \{ABCA\} = \infty.$$

* Para una definición que incluya el caso en que el vértice de un haz es un punto al infinito, ver la Sec. 9.2.

Inversamente, se puede demostrar que si la razón cruzada de cuatro puntos tiene uno de los valores $1, 0, \infty$, dos de los puntos coinciden. Más aún, si A, B, C son tres puntos colineales distintos, existe un único punto D colineal con ellos tal que $\{ABCD\} = \lambda$, donde λ tiene un valor real cualquiera.

Se infiere en seguida de la definición de razón cruzada que los pares de puntos distintos A, B y C, D se separan mutuamente o no, de acuerdo con que $\{ABCD\}$ sea negativo o positivo.

9.2 Relaciones de razón cruzada de hileras y haces. Fundamental en la teoría de razón cruzada es el siguiente

TEOREMA: *La razón cruzada de un haz de cuatro líneas es igual a la razón cruzada de una hilera de cuatro puntos en los cuales cualquier transversal que no pase por el vértice corta las cuatro líneas.*

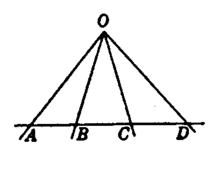


FIG. 75

La prueba, cuando el vértice del haz es un punto finito, es semejante a la dada en la Sección 4.6. Si el vértice del haz está al infinito, de tal manera que las cuatro líneas son paralelas, el contenido de este teorema será visto como definición de la razón cruzada del haz.

Consecuencias inmediatas del teorema anterior son los

COROLARIOS: (1) *Si dos transversales a cuatro líneas de un haz, ninguna de las cuales pasa por el vértice, cortan a estas líneas en A, B, C, D y A', B' C', D' respectivamente, entonces*

$$\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}.$$

(2) *Si dos haces con vértices en O y O' son subtendidos por la misma hilera de puntos A, B, C, D, entonces*

$$O\{ABCD\} = O'\{ABCD\}.$$

(3) *Si A, B, C, D y A', B', C', D' son dos hileras de puntos que están en diferentes líneas en el plano tales que $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$, y si O y O' son dos puntos distintos colineales con A y A', entonces los puntos de intersección de los pares de líneas OB, $O'B'$; OC, $O'C'$; y OD $O'D'$ son colineales.*

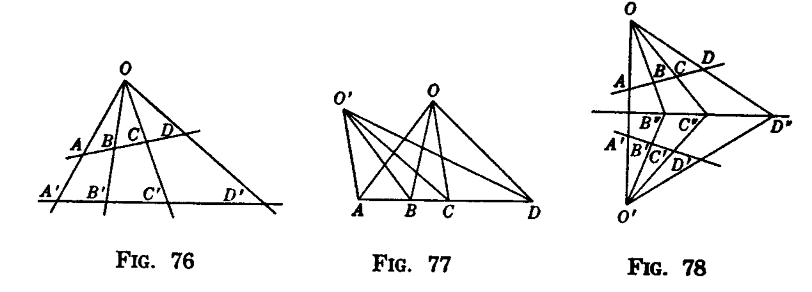


FIG. 76 FIG. 77 FIG. 78

9.3 Los seis valores de la razón cruzada. Puesto que hay veinticuatro permutaciones de cuatro letras, hay veinticuatro razones cruzadas de cuatro puntos colineales. Sin embargo, los valores de estas razones cruzadas no son todos diferentes. En efecto, demostraremos que las veinticuatro permutaciones pueden ser agrupadas en seis grupos de cuatro tales que las razones cruzadas de cada grupo son iguales. Más aún, si uno de estos valores es llamado λ, los restantes son

$$\frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \text{ y } \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Así si $\{ABCD\} = \lambda$, encontramos en seguida que cada uno de $\{BADC\}$, $\{CDAB\}$ y $\{DCBA\}$ es también igual a λ. También por aplicación directa de la definición, demostramos que cada uno de los cuatro $\{ABDC\}$, $\{BACD\}$, $\{CDBA\}$ y $\{DCAB\}$ es igual a $1/\lambda$.

En seguida consideremos $\{ACBD\}$. Con este propósito la identidad

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

se utilizará (Sección 1.2). Dividiendo por $AD \cdot BC$ y reordenando, reducimos la identidad a la forma

$$\frac{AB}{BC} \Big/ \frac{AD}{DC} = 1 - \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB};$$

esto es, $\{ACBD\} = 1 - \lambda$. Del mismo modo hay otras tres permutaciones que dan razones cruzadas que tienen este valor. Un intercambio entre B y D da

$$\{ACDB\} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Razonando como antes, encontramos que

$$\{ADBC\} = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

y

$$\{ADCB\} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Y también es fácil ver que hay cuatro razones cruzadas que corresponden a cada uno de los últimos tres valores.

La discusión anterior muestra que la razón cruzada de cuatro puntos no se altera por ningún cambio en su orden tal que cuando dos puntos se intercambian los otros dos también se intercambian.

9.4 Construcción del cuarto elemento dados tres. Nuestro primer problema es: *Dados tres puntos colineales distin-*

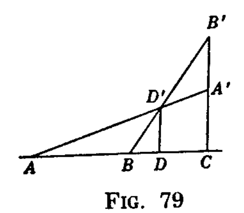


FIG. 79

tos A, B, C; construir un cuarto punto D colineal con ellos tal que {ABCD} sea igual a un número dado λ.

Por C trácese cualquier línea que corte la línea dada y en ella tómese A' y B' de modo que $\frac{CA'}{CB'} = \lambda$. Supongamos que AA' y BB' se intersecan en D' y por este punto de intersección trácese la paralela a CB' que corte la línea dada en D. Entonces D es el punto pedido. Ya que

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DD'}{CB'} \quad \text{y} \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DD'}{CA'}$$

Dividiendo y reordenando

$$\frac{AC}{CB} \bigg/ \frac{AD}{DB} = \frac{CA'}{CB'} = \lambda.$$

La existencia y unicidad del punto D son evidentes de esta construcción.

El problema de construir una línea que pase por el punto de intersección de tres líneas concurrentes tal que la razón cruzada de las cuatro tenga un valor dado, se reduce inmediatamente al problema anterior por las relaciones de la Sección 9.2.

9.5 Propiedades de razón cruzada de una circunferencia. Unamos cuatro puntos concíclicos cualesquiera A, B, C, D a dos puntos O y O' en su circunferencia. Entonces los haces así obtenidos $O(ABCD)$ y $O'(ABCD)$ tienen iguales razones cruzadas. La verdad de ello es una consecuencia inmediata de la igualdad de ángulos correspondientes de los dos haces involucrados.

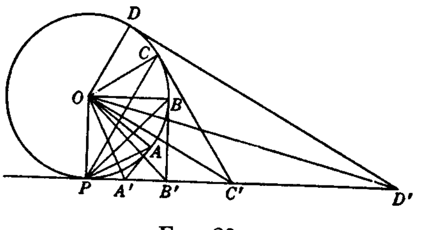


FIG. 80

Si tangentes en cuatro puntos fijos A, B, C, D de una circunferencia cortan una tangente en un punto variable P, la razón cruzada de los cuatro puntos de intersección es una constante. Puesto que (Fig. 80) los lados correspondientes de los ángulos $A'OC'$ y APC son perpendiculares, los senos de estos ángulos son iguales, y análogamente para los otros ángulos de los haces $O(A'B'C'D')$ y $P(ABCD)$. Por lo tanto, las razones cruzadas de estos haces son iguales, y por consiguiente $\{A'B'C'D'\}$ tiene un valor constante.

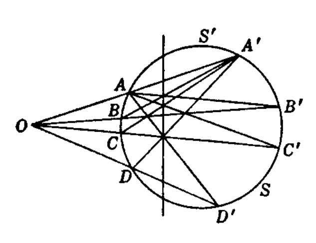


FIG. 81

Sea una circunferencia que interseca las cuatro líneas de un haz cuyo vértice no está en la circunferencia, en los pares de puntos A, A'; B, B'; C, C'; y D, D'. Entonces si S y S' son dos puntos cualesquiera en la circunferencia, las razones cruzadas de los haces $S(ABCD)$ y $S'(A'B'C'D')$ son iguales. Esto se demuestra haciendo ver que las intersecciones de AB' y $A'B$; AC' y $A'C$; AD' y $A'D$, están todas en la polar del vértice O del haz dado. Entonces

$$A'\{ABCD\} = A\{A'B'C'D'\}$$

y de aquí

$$S\{ABCD\} = S'\{A'B'C'D'\}.$$

9.6 Teorema de Pascal. Un teorema de gran importancia descubierto por Blas Pascal cuando tenía 16 años, en 1639, se da aquí en la forma cómo se aplica a un hexágono inscrito en una circunferencia. Hay un teorema similar para un hexágono inscrito en cualquier sección cónica y es claro por lo tanto que el inverso del teorema de la circunferencia no es verdadero.

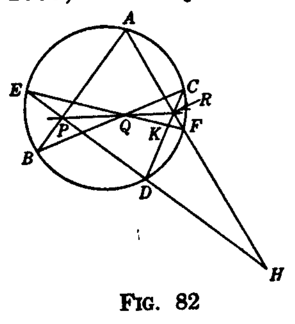


FIG. 82

TEOREMA: *Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una circunferencia son colineales.*

Refiriéndonos a la Fig. 82, vamos a probar la colinealidad de los puntos P, Q, R en los cuales los pares de lados opuestos AB, DE; BC, EF; CD, FA del hexágono inscrito $ABCDEF$ se intersecan. AF, interseca a ED en H y EF interseca a CD en K. Entonces $A\{EBDF\}$ es igual a $C\{EBDF\}$ y por lo tanto $\{EPDH\} = \{EQKF\}$. Si se une R a estos conjuntos de cuatro puntos en las líneas ED y EF, se sigue que

$$R\{EPDH\} = R\{EQKF\}.$$

Y puesto que, las primeras, terceras y cuartas líneas coinciden, las segundas líneas también coinciden; es decir P, Q y R son colineales.

La línea en que están P, Q y R es llamada la *línea de Pascal* del hexágono. Si los mismos seis puntos son unidos consecutivamente en algún otro orden, se obtiene un hexágono diferente con los mismos puntos concíclicos como vértices. Para cada uno de estos hexágonos hay una línea de Pascal, y se puede demostrar que estas sesenta líneas de sesenta posibles hexágonos son diferentes. *

9.7 Teorema de Brianchon. De las varias formas en las cuales el siguiente teorema debido a Brianchon y que lleva su nombre, puede ser probado, elegiremos el que refleja la

* Ver Lachlan, *Modern Pure Geometry*, Macmillan and Co., Págs. 113-117.

forma en la cual fue descubierto. Como el teorema de la sección anterior, este teorema, que es su dual, es aplicable a hexágonos circunscritos a cualquier sección cónica. Será enunciado y probado con respecto a una circunferencia.

TEOREMA: *Las líneas que unen los vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una circunferencia son concurrentes.*

Considérese el hexágono $ABCDEF$ circunscrito a la circunferencia O (Fig. 83), y sea $A'B'C'D'E'F'$ el hexágono cuyos vértices son los puntos de tangencia de los lados del hexágono dado, como se indica en la figura. Supongamos que $A'B'$ interseca a $D'E'$ en P, $B'C'$ interseca a $E'F'$ en Q y $C'D'$ interseca a $F'A'$ en R. Entonces, puesto que las polares de A y D pasan por P, la polar de P es AD. Asimismo las polares de Q y R son BE y CF. Y puesto que, por el Teorema de Pascal, P, Q y R son colineales, sus polares AD, BE y CF son concurrentes.

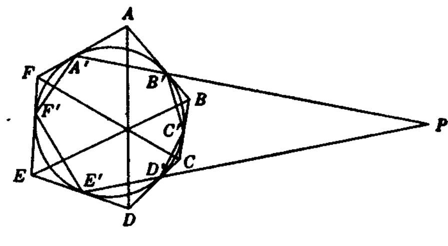


FIG. 83

El punto de concurrencia de estas líneas es llamado el *punto de Brianchon* del hexágono. Hay sesenta hexágonos diferentes cuyos lados están en las mismas seis tangentes, y sus sesenta puntos de Brianchon son todos distintos.

9.8 Teorema de Pappus.

TEOREMA: *Si los vértices de un hexágono están alternativamente en dos líneas rectas, los puntos de intersección de sus pares de lados opuestos son colineales.*

Esto puede ser visto como un caso especial del Teorema de Pascal para un hexágono inscrito en una sección cónica. Si la notación se toma como en la Sección 9.6, la prueba dada allí es aplicable, sin modificación, a este teorema.

9.9 Puntos autocorrespondientes. Si A, B, C y A', B', C', son dos conjuntos de tres puntos en la misma línea recta, entonces a cualquier punto D en la línea corresponde un punto D' tal que

$$\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}.$$

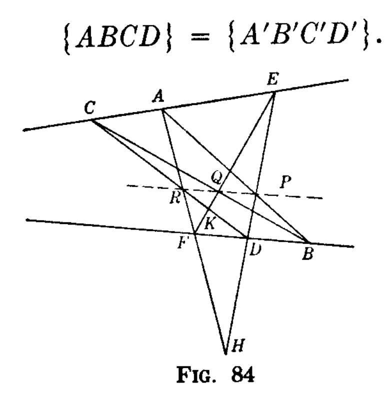


FIG. 84

Surge la pregunta de si existe un punto D que se corresponda a sí mismo, esto es, tal que

$$\{ABCD\} = \{A'B'C'D\}.$$

Si tal punto existe es llamado *punto autocorrespondiente* con respecto a estas dos razones cruzadas. Se demostrará que puede haber dos, uno, o ninguno de estos puntos.

Para encontrar los puntos autocorrespondientes cuando existen, dibújese cualquier circunferencia en el plano y sobre ella tómese cualquier punto O únanse cada uno de los puntos dados a O, y llámense las segundas intersecciones de la circunferencia con estas rectas A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1, como se muestran en la Fig. 85. Supongamos que $A_1B'_1$ y

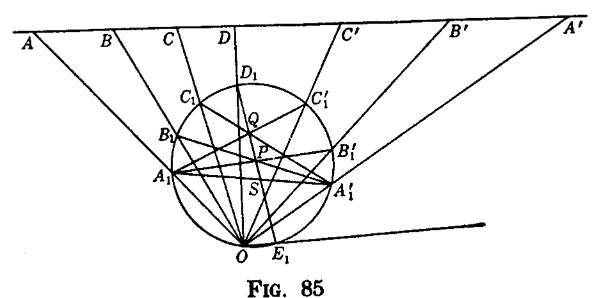


FIG. 85

A'_1B_1 se cortan en P, y que $A_1C'_1$ y A'_1C_1 se cortan en Q, trace la recta PQ. Si ésta corta a la circunferencia en D_1 y E_1, las rectas OD_1 y OE_1 cortarán la recta dada en los puntos autocorrespondientes D y E.

Para probar esto, supongamos que existen esas intersecciones de PQ con la circunferencia. También sea S la intersección de PQ con $A_1A'_1$. Entonces

$$\{ABCD\} = O\{A_1B_1C_1D_1\} = A'_1\{A_1B_1C_1D_1\} = \{SPQD_1\}$$
$$= A_1\{A'_1B'_1C'_1D_1\} = O\{A'_1B'_1C'_1D_1\} = \{A'B'C'D\}.$$

De aquí D es autocorrespondiente; y lo mismo es verdadero para E.

Se puede demostrar también, que si un punto D autocorrespondiente existe, la línea PQ deberá pasar por D_1; es decir la línea PQ deberá tener un punto en común con la circunferencia. De aquí, cuando PQ es tangente a la circunferencia hay uno y sólo un punto autocorrespondiente y cuando no corta la circunferencia no hay ninguno. Nótese que la línea PQ es la línea de Pascal del hexágono $A_1B'_1C_1A'_1B_1C'_1$, y por lo tanto $B_1C'_1$ y B'_1C_1 también se intersecan en ella.

Las construcciones anteriores para los puntos autocorrespondientes D y E incluyen también la construcción para los *rayos autocorrespondientes* de dos haces que tienen un vértice común, donde tales rayos autocorrespondientes se definen en forma análoga a la dada anteriormente para puntos autocorrespondientes.

9.10 Regla geométrica de la falsa posición. Lo que es conocido como regla geométrica de la falsa posición, será ilustrado en la solución del

PROBLEMA: ***Construir un triángulo cuyos vértices están en los lados de un triángulo dado y cuyos lados pasan por los vértices de un segundo triángulo dado.***

El triángulo buscado debe tener sus vértices en los lados del triángulo pqr, y sus lados deben pasar por los vértices del triángulo ABC (Fig. 86).

Empezando con un punto cualquiera P en p, trácese PA que corte q en Q, trácese QB cortando r en R y trácese RC intersecando p en P'. Si P coincide con P', el problema está resuelto. Si no es así, pasamos similarmente desde P_1 a P'_1 y desde P_2 a P'_2, P_1 y P_2 siendo puntos arbitrarios en p; si ni P_1 y P'_1 ni P_2 y P'_2 coinciden, constrúyanse los puntos autocorrespondientes M y N determinados por los conjuntos P, P_1, y P_2 y P', P'_1, P'_2. Si tales puntos existen y si pasamos de uno de ellos, digamos M, en la misma secuencia de operaciones que la que se siguió para pasar de P a P', regresaremos a M y tendremos una solución. Si existen dos puntos

autocorrespondientes, hay dos soluciones al problema. Si no existen puntos autocorrespondientes, no hay solución.

La solución de este problema puede ser vista como una construcción lograda después de tres intentos infructuosos. Pero puesto que los resultados de estos fracasos constituyen la base del éxito, son puntos esenciales en la solución del problema.

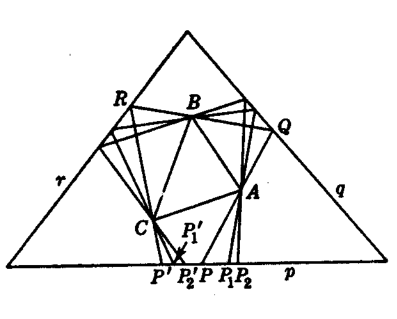


FIG. 86

9.11 Problema de Apolonio. Uno de los problemas famosos de geometría, conocido como el problema de Apolonio, es el de dibujar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas. La revisión de los diferentes casos demuestra que el número de soluciones varía desde ninguna hasta un máximo de ocho. Muchos métodos, algunos de los cuales son enteramente elementales, han sido desarrollados para resolver el problema. Otros más elegantes, dependen de la inversión, teoría de polos y polares, y propiedades de razón cruzada. El que vamos a ver aquí, en el cual se supone que los centros de las circunferencias son finitos y no colineales, es debido a Casey.

Supongamos que existe una circunferencia que toca a cada una de las tres circunferencias dadas de centros O_1, O_2, O_3, (Fig. 87) en los puntos P, Q, R respectivamente. Entonces los triángulos $O_1O_2O_3$ y PQR están en perspectiva, y el centro de perspectiva es el centro de la circunferencia tangente a las tres circunferencias dadas. Y puesto que una circunferencia tangente a dos circunferencias toca a éstas en un par de puntos antihomólogos, el eje de perspectiva pasa por tres centros de homotecia H, K, L de las circunferencias dadas tomadas en pares.

Por H tracemos una línea cualquiera que corte las circunferencias O_2 y O_3 en los puntos antihomólogos Q_1 y R_1, respectivamente. Trácense KR_1 y LQ_1, y denótense por P_1 y P'_1 los puntos antihomólogos a R_1 y Q_1 respectivamente, en los cuales estas líneas cortan a la circunferencia O_1. En forma similar se obtienen otros dos pares de puntos P_2, P'_2 y P_3, P'_3 en la circunferencia O_1. Si los dos puntos de cualquiera

de estos dos pares coinciden, se ha encontrado un punto de tangencia de O con una de las circunferencias. Si ninguno de los pares son coincidentes, se consideran los haces

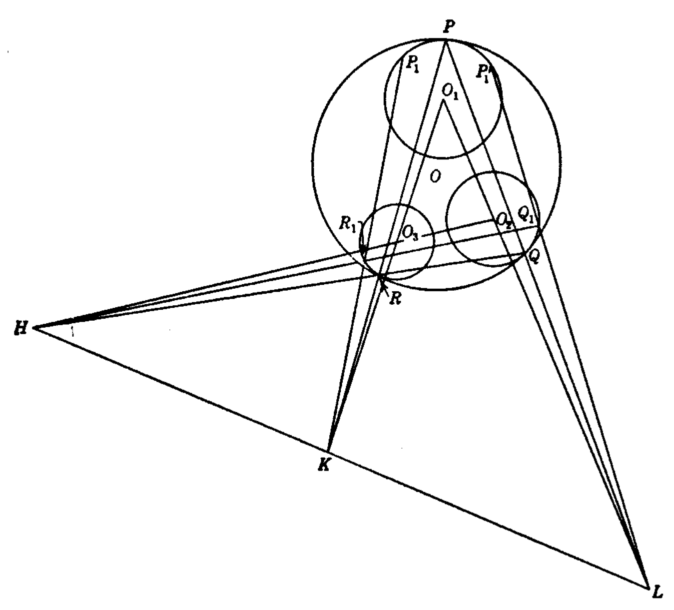


FIG. 87

$S(P_1P_2P_3P_4)$ y $S(P'_1P'_2P'_3P'_4)$, donde P_4 y P'_4 son un cuarto par de puntos correspondientes y S es un punto cualquiera en la misma circunferencia. Es evidente, de consideraciones de simetría y de una propiedad de razón cruzada de la Sección 9.5 que las razones cruzadas de estos haces son iguales. De aquí, si determinamos P en la circunferencia O_1, tal que

$$S\{P_1P_2P_3P\} = S\{P'_1P'_2P'_3P\},$$

este punto será un punto de tangencia con O, lo que se busca. Los puntos Q y R pueden ser encontrados entonces y puede construirse la circunferencia que pasa por ellos tres. Como hemos visto en la Sección 9.9, pueden existir dos puntos autocorrespondientes tales.

Ya que los seis centros de similitud están por tercias en cuatro líneas rectas, el número máximo de ocho soluciones se estima observando que hay dos para cada una de estas cuatro líneas. Sin embargo si dos puntos autocorrespondien-

tes no existen para algunas de las cuatro líneas, como puede suceder, el número de soluciones será correspondientemente menor.

EJERCICIOS

1. Si cuatro puntos en una línea son armónicos, los valores de las razones cruzadas de estos puntos, tomados en todas sus permutaciones, son -1, 2 y $\frac{1}{2}$.

2. Demostrar que siempre es posible, escogiendo adecuadamente haz y transversal, obtener una razón simple de dos segmentos que sea igual a la razón cruzada de cuatro puntos colineales dados.

3. Base una prueba del Teorema de Desargues, referente a triángulos en perspectiva en propiedades de razón cruzada.

4. La razón cruzada de cuatro puntos en una línea, es igual a la razón cruzada de sus polares con respecto a cualquier circunferencia.

5. La razón cruzada de cuatro puntos en una línea es igual a la razón de sus inversos con respecto a cualquier centro de inversión colineal con ellos.

6. Construir un segmento de línea cuyos extremos estén uno en cada una de dos líneas dadas y que subtienden ángulos dados en cada uno de dos puntos dados.

7. Inscribir en una circunferencia un triángulo cuyos lados deberán pasar por tres puntos dados.

8. Colocar un segmento de línea de longitud dada con sus extremos uno en cada una de dos líneas rectas; de tal manera que subtienda un ángulo recto en un punto dado.

9. Considere algunos de los casos especiales del problema de Apolonio en los cuales los centros de las circunferencias sean colineales.

10. Obtenga una solución del problema de Apolonio basándose en la solución de los siguientes problemas: (*a*) Construir una circunferencia que pase por dos puntos dados y toque a una circunferencia dada. (*b*) Construir una circunferencia que pase por un punto dado y toque dos circunferencias dadas.

11. Pruebe el Teorema de Pappus sin hacer uso de las propiedades de razón cruzada.

12. Si A, B, C son puntos colineales, encontrar D en su línea tal que

$$\{ABCD\} = \{BACD\}.$$

13. Si, por el punto medio M de la cuerda AB de una circunferencia, se trazan otras dos cuerdas CD y EF y si DE y CF intersectan a AB en G y H, entonces M es el punto medio de GH.

14. Si seis puntos en una línea se corresponden en pares: A, A'; B, B' y C, C'; y si $OA \cdot OA = OB \cdot OB''$, $OC \cdot OC'$, donde O es un punto colineal con estos seis puntos, entonces $\{AA'BC\} = \{A'AB'C'\}$.

15. Los tres lados de un triángulo variable ABC pasa cada uno por uno de tres puntos fijos colineales D, E, F. Si A y B se mueven en líneas fijas demostrar que C se mueve en una línea fija concurrente con las otras dos.

16. Enunciar y probar el dual del Teorema del ejercicio anterior.

CAPITULO 10

INVOLUCION

10.1 Hilera de puntos en involución. Si los pares de puntos $A, A'; B, B'; C, C'; \ldots$ están en una línea recta y si están situados con respecto a un punto O de la línea de tal manera que $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' \ldots$, se dice que los puntos están *en involución*. El punto O es el *centro* de involución y los dos puntos que pertenecen al mismo par se llaman *puntos conjugados* de la involución. La línea misma es llamada la *base* de la involución.

EJEMPLOS: (*a*) Si cada uno de los pares de puntos $A, A'; B, B'; C, C'; \ldots$ están separados armónicamente por los puntos P y Q, son puntos de una involución, cuyo centro es el punto medio de PQ.

(*b*) Considérese un conjunto de circunferencias coaxiales que se intersecan. Si una línea recta, interseca su eje radical en un punto finito distinto de los puntos comunes a las circunferencias, los puntos en los cuales esta línea interseca circunferencias del conjunto, están en involución, con puntos conjugados que están en la misma circunferencia. El centro de involución es el punto de intersección de la línea con el eje radical.

10.2 Dos clases de involución. Los dos puntos de un par conjugado de una involución, pueden ambos estar en el mismo lado del centro, o pueden estar en lados opuestos del centro de involución. Obviamente, si los de un par están en el mismo lado, o si están en lados opuestos del centro, lo mismo será verdad para los puntos de cualquier par conjugado. Se dice que una involución es *hiperbólica*, si los dos puntos de un par conjugado, están en el mismo lado del centro; y es *elíptica* si los dos puntos de dicho par están en lados opuestos del centro. Así, la involución con centro en O y un par de puntos conjugados A, A' es hiperbólica o elíptica, de acuerdo con que el producto $OA \cdot OA'$ sea positivo o negativo.

La involución del Ej. (*a*) de la sección anterior, es del tipo hiperbólico. En el Ej. (*b*) se ilustran ambos tipos. Si la

base de la involución interseca el eje radical entre los puntos comunes a las circunferencias, la involución es elíptica. En todos los otros casos es hiperbólica.

En una involución hiperbólica, dos puntos son *autoconjugados*, es decir, cada uno es su propio conjugado. Porque, obviamente, cuando $OA \cdot OA'$ es positivo hay dos puntos M

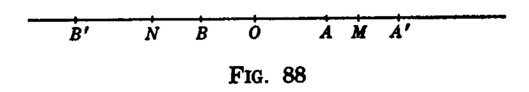


FIG. 88

y N en la línea para los cuales $OA \cdot OA' = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2$. Estos puntos M y N son conocidos como los *puntos dobles* de la involución. La involución elíptica no tiene puntos dobles.

Otra forma de expresar lo anterior, es que, si la involución tiene puntos dobles y es por lo tanto hiperbólica, los segmentos AA', BB' o, están contenidos completamente, o están fuera completamente el uno del otro; es decir, los segmentos no se traslapan. Si no tiene puntos dobles, estos segmentos se traslapan y la involución es elíptica.

Lo que se sugiere en el Ej. (*a*) puede ser fácilmente probado, a saber, que una involución hiperbólica de puntos siempre consiste de pares que son conjugados armónicos con respecto a un par de puntos fijos.

Cualquier involución elíptica de puntos puede considerarse como trazada en una línea recta por los lados de un ángulo recto que gira alrededor de su vértice. Porque, puesto que los segmentos AA' y BB' se traslapan, las circunferencias con estos segmentos como diámetros se intersecan en dos puntos H y K que son simétricos con respecto a la base de la involución, y

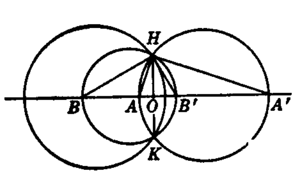


FIG. 89

$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = -\overline{OH}^2$, donde O es el punto medio de HK. Más aún, si C, C' son un par de puntos conjugados de la involución, la circunferencia con diámetro CC', también pasa por H y K. De aquí cada uno de los segmentos AA', BB', CC', subtienden un ángulo recto en H y también en K, y la involución puede considerarse como trazada en la forma descrita anteriormente. Obsérvese que H y K son los dos únicos puntos en el plano que satisfacen estas condiciones.

10.3 Una involución determinada por pares de puntos conjugados.

TEOREMA: *Dos pares de puntos conjugados de una involución determinan la involución.*

Para probar este teorema demostraremos que si se da un quinto punto arbitrario de la involución su conjugado es único. Sean A, A'; B, B' (Fig. 90) los dos pares de conjugados. Por P un punto cualquiera fuera de su línea, dibújense las dos circunferencias por los conjuntos de puntos P, A, A' y P, B, B' y sea Q el segundo punto en el cual estas circunferencias se intersecan.

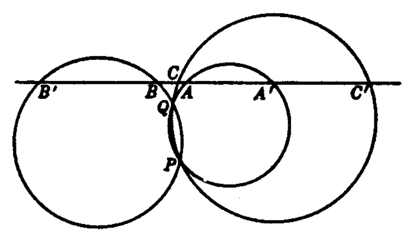


FIG. 90

Para encontrar el conjugado de un punto C, dibújese la circunferencia que pasa por P, Q, C. El otro punto C' en el cual esta circunferencia interseca la base de la involución es el conjugado de C. Porque

$$OP \cdot OQ = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC';$$

y la determinación única de C' es una consecuencia de la existencia de una y sólo una circunferencia por los puntos P, Q, C. También, el punto O en el cual PQ interseca la base es el centro de la involución.

Si uno de los puntos, digamos B', es el punto ideal de la línea, su conjugado B es el centro de involución. El lector estará capacitado para demostrar sin dificultad que una involución puede ser determinada por su centro y un par de puntos conjugados. Si la involución tiene puntos dobles, ellos o uno de ellos y el centro determinan la involución.

10.4 Relaciones de razón cruzada de los seis puntos de una involución. Una de las propiedades de gran alcance de una involución de puntos es una relación de razón cruzada que existe entre los seis puntos de cualesquiera tres pares conjugados. Esta relación se presenta en el siguiente

TEOREMA: *La razón cruzada de cualesquiera cuatro puntos de una involución en la cual están representados tres*

pares conjugados, es igual a la razón cruzada de sus cuatro conjugados; e inversamente, si seis puntos son relacionados por pares, y la razón cruzada de cuatro de ellos que representan los tres pares es igual a la razón cruzada de los cuatro puntos correspondientes, entonces los pares son pares conjugados de una involución.

Si $A, A'; B, B'; C, C'$ son tres pares conjugados de una involución de centro O y cuya constante es $K = OA \cdot OA'$, una de las numerosas formas del teorema es que

$$\{ABA'C'\} = \{A'B'AC\}.$$

para demostrar esto debemos verificar que

$$\frac{AA'}{A'B}\bigg/\frac{AC'}{C'B} = \frac{A'A}{AB'}\bigg/\frac{A'C}{CB'}.$$

En esta ecuación substituyamos AA' por $OA' - OA$, y análogamente para todos los demás segmentos. Si luego, además sustituimos en el lado derecho, OA por su igual $\frac{K}{OA'}$, y análogamente para cada uno de los segmentos de la derecha, ese miembro se puede ver por una fácil reducción que es igual al miembro de la izquierda de la ecuación. Las pruebas para las otras formas de teorema son similares a la que se acaba de dar.

Una demostración del inverso puede hacerse depender de la determinación única del cuarto elemento de una razón cruzada que tiene dados los otros tres elementos y su valor.

Se observará que el teorema también es válido cuando uno o ambos de los pares conjugados consisten de puntos dobles. Así, si M y N son puntos dobles de la involución anterior, tenemos, por ejemplo

$$\{AA'MB\} = \{A'AMB'\}\text{; y también } \{AMA'N\} = \{A'MAN\}.$$

Como una consecuencia del teorema de esta sección, tenemos que cuando $A, A'; B, B'; C, C'$ son pares de puntos conjugados de una involución,

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0;$$

e inversamente, cuando esta relación se satisface, los puntos están en involución.

EJERCICIOS

1. Demostrar que el conjugado del centro de una involución de puntos es el punto ideal de la base.

2. Demostrar que una construcción para los puntos dobles de una involución hiperbólica puede hacerse depender de la construcción de las circunferencias que pasan por dos puntos dados y son tangentes a una línea dada.

3. Discuta el caso al que se llega en la prueba del teorema de la Sección 10.3 cuando P, Q y C son colineales.

4. Complete la prueba del teorema inverso de la Sección 10.4. También pruebe los enunciados en el último párrafo de esta sección.

5. Estudie la figura adjunta, y de ello deduzca una construcción para el centro de una involución de puntos, cuando son dados dos pares de conjugados. También use este método para construir el conjugado de un punto dado C.

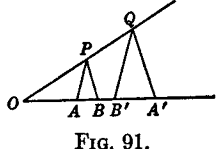


Fig. 91.

6. Demostrar que si A, A'; B, B'; C, C' son pares de puntos en involución, y si D y D' son dos puntos en la línea tales que $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$, entonces D y D' también son un par conjugado de la involución.

7. Demostrar que todos los puntos de una línea recta que están por pares a distancias iguales en lados opuestos a un punto fijo en la línea, forman una involución cuyos puntos dobles son el punto fijo y el punto ideal de la línea.

8. Probar que si uno de los puntos dobles de una involución está al infinito, el otro punto doble biseca cada segmento que une pares de puntos conjugados.

9. Si P, Q y P', Q' son dos pares cualesquiera de puntos en una línea, y si P'' y Q'' son los conjugados armónicos de P y Q respectivamente con respecto a P' y Q', entonces P, Q; P', Q'; P'', Q'' son pares conjugados de una involución.

10. Si, con respecto a dos puntos distintos cualesquiera en una línea, tomamos los conjugados armónicos de los puntos de una involución, los puntos así obtenidos, al aparearlos como en la involución dada forman una involución.

11. En un conjunto de circunferencias coaxiales que no se intersecan, los puntos límites son los puntos dobles de la involución que determinan estas circunferencias en la línea de los centros.

12. En una involución elíptica de puntos, encontrar un par de puntos conjugados, que separen armónicamente a un par de puntos conjugados dados. Demostrar que sólo existe una pareja tal.

13. A, A'; B, B'; son pares de puntos conjugados de una involución cuyo centro es O, y P es un punto cualquiera en la perpendicular por O a la base de la involución. Demostrar que $\tan PAO \tan PA'O = \tan PBO \cdot \tan PB'O$.

14. Si $\{AA'BB'\} = -1$ y si L y M son los puntos medios de AA' y BB' respectivamente, demostrar que A, A'; B, B'; L, M son pares de puntos en involución.

15. Demostrar sin el uso de razones cruzadas que si A, A'; B, B'; C, C' son pares de puntos en una involución, entonces $AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0$.

10.5 Haces de líneas en involución. Una consideración de las propiedades de razón cruzada de una involución de puntos, junto con el principio de dualidad, sugiere el concepto de una involución de las líneas de un haz. Definiremos un haz de líneas *en involución* si están correlacionadas por parejas y son tales que los puntos de intersección de estos pares con cualquier transversal que no pase por el vértice del haz son pares conjugados de una involución de puntos. Si la involución resultante de puntos tiene puntos dobles, las líneas del haz que pasan por ellos se llamarán *líneas dobles* de la involución. Las dos líneas que pertenecen al mismo par se llaman *líneas conjugadas*. Los términos *hiperbólico* y *elíptico* serán usados con haces de líneas en involución en sentidos que corresponden a sus usos con hileras de puntos en involución.

De las propiedades de razón cruzada concluimos inmediatamente que si un haz de líneas corta cualquier transversal en una involución, cortará cualquier transversal que no pase por su vértice en una involución. También si rectas correspondientes de dos haces distintos se cortan en puntos colineales y uno de ellos está en involución, lo mismo será cierto del otro.

10.6 Haz de involución con vértice en una circunferencia.

TEOREMA: *Si la involución de líneas en la cual a, a'; b, b'; c, c'; son pares conjugados, tiene su vértice en una circunferencia, y si estas seis líneas cortan la circunferencia nuevamente en A, A', B, B', C, C' respectivamente, entonces las líneas AA', BB', CC' son concurrentes.*

Refiriéndonos a la Fig. 92, en la cual S es el vértice del haz, tenemos

$$\{aa'bc\} = \{a'ab'c'\},$$

y en consecuencia

$$B'\{AA'BC\} = C\{A'AB'C'\}.$$

Si BB', CC' y $B'C$ intersecan a AA' en O, L y H respectivamente, entonces

$$\{AA'OH\} = \{A'AHL\},$$

de lo cual se infiere que L coincide con O; esto es AA', BB' y CC' son concurrentes.

Es aparente que cuando la involución es elíptica el punto O está en el interior de la circunferencia, puesto que, en este caso, las rectas conjugadas de la involución, cortan la circunferencia (en puntos distintos al vértice del haz) en pares de puntos que se separan mutuamente y por lo tanto las rectas conjugadas se separan entre sí. Si la involución es hiperbólica, O está fuera de la circunferencia. Inversamente, según que O esté dentro o fuera de la circunferencia, la involución es elíptica o hiperbólica.

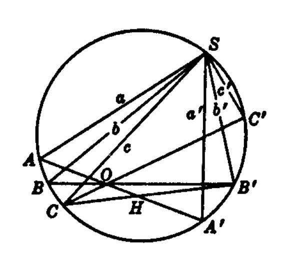


FIG. 92

10.7 Líneas conjugadas en ángulos rectos. En cada involución de líneas hay un par de líneas conjugadas que son perpendiculares entre sí. Esto puede verse del hecho que cuando menos un diámetro de la circunferencia (Fig. 92) pasa a través del punto O, y las líneas del haz S, trazadas a sus extremidades, son un par de líneas tales de la involución. Si más de un diámetro pasa a través de O entonces también así sucede con todos los diámetros, en cuyo caso cada par de líneas conjugadas son perpendiculares. De aquí tenemos el

TEOREMA: *En una involución de un haz de líneas siempre hay un par de líneas conjugadas perpendiculares entre sí; y si hay más de un par de líneas conjugadas en ángulo recto, entonces todos los pares son perpendiculares y la involución es elíptica.*

10.8 Involución de puntos en una transversal que interseca los lados de un cuadrángulo completo.

TEOREMA: *Los tres pares de lados opuestos de un cuadrángulo completo son cortados por cualquier transversal que no pasa a través de un vértice en tres pares de puntos conjugados de una involución.*

Supongamos que los lados del cuadrángulo completo $PQRS$ son cortados por la transversal u en puntos tales co-

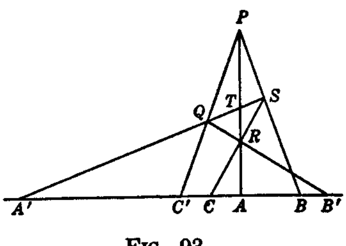


FIG. 93

mo se indica en la Fig. 93. Entonces considerando las intersecciones de u con los haces $R(AQTS)$ y $P(AQTS)$, tenemos

$$\{A'B'AC\} = \{A'C'AB\}.$$

y puesto que (Sección 9.3) la última de estas razones cruzadas es igual a $\{ABA'C'\}$, los puntos A, A'; B, B'; C, C' ; son pares conjugados de una involución (Sección 10.4).

Este teorema nos conduce a una solución lineal del problema de construir el conjugado de un punto dado de una involución, cuando son dados dos pares conjugados.

Enunciaremos aquí sin dar su prueba, el dual

TEOREMA: *Las líneas rectas que unen un punto cualquiera que no está en ninguno de los lados de un cuadrilátero completo, con los tres pares de vértices opuestos, son tres pares de líneas conjugadas de una involución.*

10.9 Involución de puntos en una transversal que interseca una circunferencia y los lados de un cuadrángulo inscrito.

TEOREMA: *Si en un cuadrángulo inscrito en una circunferencia, cualquier transversal que no pasa por un vértice, interseca la circunferencia y los pares de lados opuestos del cuadrángulo en una involución.*

Consideremos el cuadrángulo $PQRS$ inscrito en una circunferencia y la transversal u que interseca pares de lados opuestos y la circunferencia como se indica en la Fig. 94.

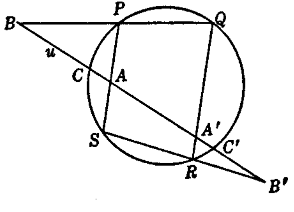


FIG. 94

Entonces, considerando las intersecciones de los haces $P(CSC'Q)$ y $R(CSC'Q)$ con la línea u tenemos

$$\{CAC'B\} = \{CB'C'A'\}.$$

Permutando, tenemos

$$\{CAC'B\} = \{C'A'CB'\},$$

lo cual demuestra que los pares de puntos A, A'; B, B'; C, C'; están en involución. Los puntos en los cuales el otro par de lados opuestos del cuadrángulo intersecan a u, pertenecen también a la involución.

10.10 Cuadrángulo con pares ortogonales de lados opuestos. Los puntos en los cuales los pares de lados opuestos de un cuadrángulo completo intersecan la línea al infinito, están en involución. De aquí, si por un punto cualquiera P en el plano, se trazan líneas paralelas a los lados del cuadrángulo, estas líneas forman un haz en involución. Ahora, si dos pares de lados opuestos del cuadrángulo son perpendiculares uno al otro, se cumple también para las líneas correspondientes del haz P. Así, por el teorema de la Sección 10.7, todos los pares de líneas conjugadas del haz, están en ángulos rectos y el tercer par de lados opuestos del cuadrángulo es también de lados ortogonales. De donde tenemos el

TEOREMA: *Si dos pares de lados opuestos de un cuadrángulo completo son ortogonales, el tercer par es también de lados ortogonales.*

Un cuadrángulo que tiene estas propiedades, es un cuadrángulo ortocéntrico (Sección 5.4).

EJERCICIOS

1. Si líneas relacionadas de un haz, forman ángulos iguales en magnitud, pero opuestos en dirección, con una línea fija del haz, el haz está en involución. Demostrar que la involución es hiperbólica, e identificar sus líneas dobles.

2. Cuando las líneas dobles de un haz en involución son perpendiculares entre sí una a otra, demostrar que bisecan los ángulos entre cada par de líneas conjugadas del haz.

3. Probar el último teorema de la Sección 10.8.

4. Demostrar que si por un punto cualquiera fuera de una circunferencia, se trazan tres líneas que la corten en los pares de puntos A, A'; B, B'; C, C' respectivamente y si unimos estos puntos a cualquier otro punto de la circunferencia, el haz así obtenido está en involución.

5. Dos haces de líneas en involución tienen el mismo vértice. Investigue la posibilidad de que un par de líneas conjugadas de uno coincida con un par de líneas conjugadas del otro. ¿Puede haber más de uno de estos pares?

6. Si teniendo como diámetro las diagonales de un cuadrilátero completo, se dibujan circunferencias y dos de ellas se intersecan, la tercera pasará por sus puntos comunes.

7. Interprete el ejercicio anterior con relación al hecho de que los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero completo están en una línea recta.

8. Dados dos pares de líneas conjugadas de una involución. Se pide construir, usando únicamente regla, la conjugada de una línea dada del haz.

9. Si un par de líneas es antiparalelo con respecto a un segundo par, estas líneas intersecan la línea al infinito en pares de puntos conjugados de una involución hiperbólica por cuyos puntos dobles pasan las bisectrices de los ángulos formados por las líneas de uno de los pares dados.

10. Si por un punto cualquiera P, se dibuja un par de líneas paralelas a los lados de un cuadrado, y otros dos pares se dibujan a sus vértices opuestos, estos pares son líneas conjugadas de una involución.

CAPITULO 11

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

11.1 Introducción. Lo que consideramos generalmente como elementos de la geometría elemental —y debe de incluirse mucho de la geometría de las cónicas— fue satisfactoriamente organizado algunos siglos antes del advenimiento de la Era Cristiana. Ya en ese tiempo se estableció el marco para realizar construcciones en geometría elemental, o sea que estas construcciones se deben realizar usando regla y compás únicamente. Las restricciones a estos instrumentos son comúnmente atribuidas a Platón.

Se harán aquí algunas observaciones referentes a esta convención. En primer lugar, es solamente una convención y no una necesidad lógica. Cualquier otro instrumento de construcción puede ser substituido por alguno o por ambos, la regla y el compás, o pueden ser usados con ellos. No habrá interferencia alguna con el aspecto lógico del problema de la construcción geométrica si realizamos dichos cambios. También la restricción es más bien rigurosa aparentemente. Ser capaces de usar la regla sin marcas para trazar rectas únicamente, y el compás para trazar circunferencias únicamente puede parecernos en un principio limitar las posibilidades de tal manera que muchas construcciones no pueden hacerse. El que estas limitaciones no son tan severas como al principio aparecen, es un hecho bien conocido para quienes han estudiado geometría.

El problema de hacer construcciones bajo otras condiciones que no sean el uso de regla y compás ha sido investigado sistemáticamente. Algunos de los resultados de estas investigaciones se presentarán en este capítulo.

11.2 Los tres problemas famosos. Tres problemas geométricos interesaron tanto a los griegos de la antigüedad

que han pasado de generación en generación a través de los siglos y se han conocido por mucho tiempo como los tres problemas famosos de la geometría elemental. Estos problemas son: la trisección del ángulo; la duplicación del cubo; y la cuadratura del círculo. Se entiende que cada una de las tres construcciones debe de hacerse únicamente con regla y compás. Muchos intentos se han hecho para resolver estos problemas. De hecho, han atraído la atención de algunos de los mejores matemáticos del mundo. Pero todos estos intentos estaban destinados al fracaso, pues fue demostrado en el siglo XIX que su solución es imposible.

Esto no significa, sin embargo, que un ángulo no pueda ser trisecado, o que es imposible duplicar un cubo, o construir un cuadrado equivalente a un círculo dado. Si la restricción a regla y compás se modifica de manera adecuada, cada uno de estos problemas puede ser rápidamente resuelto. Estas soluciones fueron inventadas por algunos geómetras griegos quienes, hace más de dos mil años, se interesaron en estos problemas ahora famosos. *

11.3 Construcciones con regla y compás. Se ha establecido un criterio, por el cual es posible determinar si la construcción de un problema propuesto puede o no efectuarse con regla y compás. Contribuciones importantes en este campo fueron realizadas por Gauss, quien atacó el problema de la división de la circunferencia en n partes iguales, y determinó los valores de n para los cuales la división puede ser hecha.

Fue conocido en el tiempo de Euclides que esta división puede hacerse si n es cualquiera de los números $a \cdot 2^{\alpha}$, ($a = 2, 3, 5, 15$; $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$), y se confió plenamente durante dos mil años, que no eran posibles otras distintas a éstas. El primer avance fue hecho por Gauss cuando descubrió el hecho notable de que se podía construir un polígono regular de diecisiete lados con regla y compás. También encontró que si p es un número primo de la forma $2^{2^t} + 1$ era construible un polígono regular de p lados con estos instrumentos. Para $t = 0, 1, 2, 3, 4$, los valores correspondientes de p son los números primos 3, 5, 17, 257 y 65 537. Euler demostró que p no es primo cuando $t = 5$, $2^{32} + 1$ es igual al producto $641 \cdot 6\,700\,417$.

* Ver Sanford, *History of Mathematics*, Houghton Mifflin Co. Págs. 256-268.

El resultado de la completa investigación de la división del círculo y la cuestión relacionada de la construcción de polígonos regulares conduce al

TEOREMA: * *Una condición necesaria y suficiente para que un polígono regular de n lados pueda inscribirse en un círculo por medio de regla y compás es que* $n = 2^{\alpha} \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots$, *donde* $p_1, p_2, \ldots$ *son números primos distintos de la forma* $2^{2^t} + 1$.

Para demostrar la imposibilidad de duplicar un cubo y de trisecar un ángulo con regla y compás usaremos el siguiente teorema, el cual, para mayor brevedad, se da aquí sin prueba. Demostraciones de él son fácilmente accesibles en inglés. †

TEOREMA: *No es posible construir por medio de regla y compás, una línea cuya longitud es una raíz de una ecuación cúbica con coeficientes racionales y que no tiene raíz racional.*

Si se nos ha dado un cubo cuya arista es la unidad, la arista de un cubo cuyo volumen es doble al del cubo dado es una raíz de la ecuación $x^3 - 2 = 0$. Es obvio que por el teorema anterior no es posible construir con regla y compás una línea cuya longitud sea igual a la arista del cubo deseado.

Demostraremos a continuación que es imposible trisecar un ángulo arbitrario con regla y compás, demostrando que es imposible construir un ángulo de 40° y de aquí trisectar 120°. Considérese la identidad $4 \cos^3\theta - 3 \cos\theta = \cos 3\theta$, y sea $\theta = 40°$. Entonces $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$, y la identidad resulta $4 \cos^3 40° - 3 \cos 40° + \frac{1}{2} = 0$. Si ahora ponemos $x = 2 \cos 40°$, resulta que este último es una raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$. Las únicas raíces racionales de esta ecuación, si es que tiene alguna, se encuentran entre los divisores enteros del término constante. Pero por prueba se encuentra que ni 1 ni -1 es una raíz. De aquí que 2 cos 40° no puede ser construido con regla y compás, el ángulo 40° tampoco puede ser construido así, y el án-

* Para una excelente discusión con la prueba de este teorema véase la monografía titulada *Constructions with Ruler and Compasses*, de L. E. Dickson's y *Monographs on Modern Mathematics*, de Young's, Longmans, Green & Co., 1911.

† Ver *Theory of Equations*, Págs. 90-92, de Dickson. Wiley, 1914. También *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Págs. 52-55, de Klein, traducido por Hedrick y Noble, Macmillan, 1932.

gulo 120° no se puede trisecar de este modo. Incidentalmente tenemos con esto una demostración de que es imposible inscribir en un círculo un polígono regular de nueve lados.

El problema de cuadrar el círculo con una regla y compás fue eliminado por Lindemann quien demostró, en 1882 que el número π es trascendente. De esto sigue que el círculo no puede ser rectificado con regla y compás, así como ninguna figura rectilínea, teniendo un área igual a la de un círculo dado, puede ser construida con estos instrumentos. *

11.4 Construcciones con regla solamente. Entre las construcciones que no pueden hacerse con una regla solamente está la de dibujar una línea paralela a una línea dada. Si, sin embargo en la línea dada hay tres puntos A, B, C tales que $AB = BC$ entonces es posible trazar con regla una paralela a la línea dada por cualquier punto P exterior a esa línea. Así, en la Fig. 95, si P se une a A y C y si una línea arbitraria por B interseca estas líneas en Q y S respectivamente, entonces AS y CQ se intersecarán en R, el cual junto con P determina la paralela pedida (Sección 3.6).

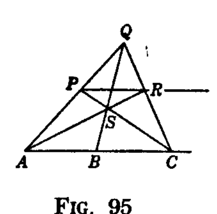


FIG. 95

Recíprocamente, si dos líneas son paralelas, un segmento en una de ellas puede bisecarse por medio de una regla solamente. Los pasos para esta construcción son obvios.

De lo anterior se deriva una solución al problema: *Trazar con la regla solamente, una línea por un punto dado paralela a dos líneas paralelas dadas.*

11.5 Construcciones con regla y circunferencia dada. Poncelet en su "Traité des propriétés projectives des figures", publicado en 1822, sugirió las posibilidades de la regla y una circunferencia dada, con centro dado pero quedó para Steiner publicar una demostración 11 años después de que toda construcción que pueda hacerse con regla y compás puede hacerse con regla solamente si se dan en el plano de construcción una circunferencia y su centro.

Para indicar cómo puede establecerse esa posibilidad notemos que todas las construcciones hechas con regla y com-

* Ver *The History and Transcendence of* π, de D. E. Smith, en Young's *Monographs on Modern Mathematics*.

pás dependen en última instancia de hallar (*a*) el punto de intersección de dos líneas rectas; (*b*) los puntos de intersección de una línea y de una circunferencia; (*c*) los puntos de intersección de dos circunferencias. La primera de estas tres se hace con la regla solamente y se puede demostrar que con regla y una circunferencia fija podemos (1) determinar los puntos de intersección de una línea recta l con una circunferencia cuyo centro C y radio r están dados: (2) determinar los puntos de intersección de dos circunferencias teniendo dados sus centros C y C' y sus radios r y r'.

Enunciaremos y resolveremos algunos problemas que son fundamentales para la teoría.

PROBLEMA 1. *Por un punto P construir la línea paralela a una línea dada.*

Unase E, un punto cualquiera de la línea l, al centro C de la circunferencia fija. (Fig. 96). Puesto que en esta línea hay segmentos adyacentes iguales RC y CQ, es posible dibujar la cuerda AB, paralela a CQ (Sección 11.4). Entonces los diámetros AA' y BB' determinan las extremidades de la cuerda $A'B'$ tal que AB y $A'B'$ intersecan l en los puntos D y F para los que $DE = EF$. La paralela a l buscada que pasa por P puede dibujarse ahora. Construcciones con menos pasos que la anterior pueden hacerse si la línea dada corta la circunferencia fijada.

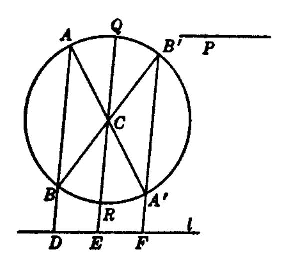


FIG. 96

PROBLEMA 2. *Por un punto P construya una línea perpendicular a una línea dada.*

En la Fig. 97 únase E, un punto de l, y C, el centro de la circunferencia fija y supongamos que la línea CE corta esta circunferencia en Q y R. Por R dibújese una cuerda RS paralela a l. Entonces QS es perpendicular a l y sólo nos queda dibujar por P una paralela a QS.

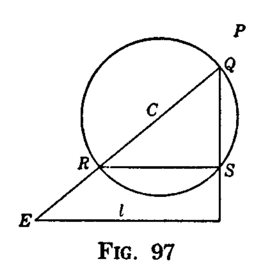


FIG. 97

PROBLEMA 3. *Construir una cuarta proporcional a tres segmentos de línea dados.*

Sean los segmentos dados $a = AB$, b, c. Dibujar líneas arbitrarias l y l' que se cortan en P. Por C, centro de la circunferencia fija, trácense líneas paralelas a a y l, que intersecan la circunferencia en D y E respectivamente. Por A y B trácense paralelas a DE y CE

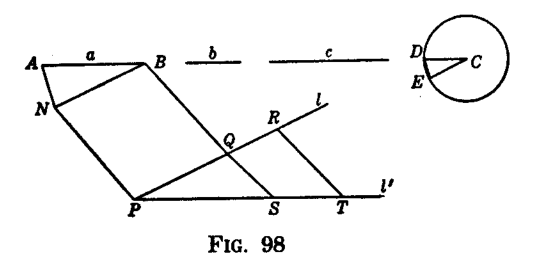


FIG. 98

respectivamente, y señálese su punto de intersección como N. Dibújese NP, y por B trácese la paralela a esta última que interseca l en Q. Entonces $PQ = AB$. De la misma manera en la línea l obtengamos $QR = b$; y en l' $PS = c$. Entonces la línea por R paralela a QS determinará el otro extremo de ST, la cuarta proporcional.

Como un corolario a la demostración de Steiner, se sigue que todas las construcciones que pueden hacerse con regla y compás, se pueden hacer con regla y compás de radio fijo. Obviamente el número de pasos en construcciones hechas con la regla y el compás fijo es generalmente menor que si se usa la regla y una circunferencia fija con su centro.

11.6 Geometría de Mascheroni del compás. El geómetra italiano L. Mascheroni investigó el problema de hacer construcciones solamente con el compás, y publicó sus resultados en 1797 en un volumen titulado *Geometria del compasso.* * Una parte considerable de su trabajo está dedicada a la división del círculo en partes iguales. Pero pueden hallarse en él también muchas otras construcciones exactas y aproximadas y se demuestra que todas las construcciones que son posibles con regla y compás pueden hacerse con compás solamente. Se entiende, por supuesto, que en tal solución del problema se ve una recta como construida cuando se hallan dos puntos de ella.

Mascheroni asegura que, en total, sus construcciones son más elegantes y más exactas que las construcciones clásicas dadas por Euclides. En la geometría del compás los

* Una traducción francesa bajo el título *Géométrie du compas*, por A. M. Carette se editó varias veces.

puntos están determinados por la intersección de arcos de circunferencias y se observará en las soluciones de los problemas que siguen que el ángulo de intersección de estos arcos es generalmente suficientemente grande, de manera que el punto de intersección está determinado con precisión.

Otro rasgo del trabajo de Mascheroni, particularmente el que se refiere a la división de la circunferencia es el uso de compases con radio fijo (*fidèles compas*) así, si la solución de un problema particular requiere dibujar circunferencias no todas del mismo radio, se usan tantos compases como haya circunferencias de diferentes tamaños, y cada uno de ellos se ajusta con un radio que no cambia en el transcurso de la construcción. Esto se hace en interés de la precisión puesto, como el autor dice, podemos estar seguros que la abertura del compás se conserva exactamente.

11.7 Construcciones fundamentales con el compás. Un número de construcciones de importancia debido a su naturaleza fundamental, se harán solamente con el compás.

Las demostraciones de las más sencillas serán omitidas y de las otras serán solamente indicadas brevemente.

PROBLEMA 1. *Construir el simétrico de un punto C con respecto a la línea AB.*

Esto se lleva a cabo dibujando circunferencias de centros A y B con radios AC y BC respectivamente. Su segundo punto de intersección D, es el simétrico de C.

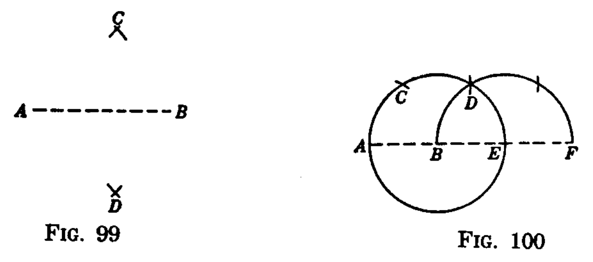


FIG. 99

FIG. 100

PROBLEMA 2. *Doblar, triplicar, etc. un segmento de línea dado.*

Si se dibuja una circunferencia con B de centro y AB de radio, y si partiendo en A como centro y con el mismo radio los arcos iguales AC, CD y DE se trazan, A, B y E serán colineales y AE será el doble de AB. Continuando de la misma manera se puede encontrar un punto F colineal con A, B y E tal que AF sea el triple de AB.

PROBLEMA 3. *Construir una cuarta proporcional a tres segmentos de línea dados.*

Si a, b, c son los segmentos dados empezaremos por dibujar circunferencias concéntricas con radios a y b. Entonces con c como radio y con un punto cualquiera P de la primera de estas circunferencias como centro, dibujamos un arco que interseca esta misma circun-

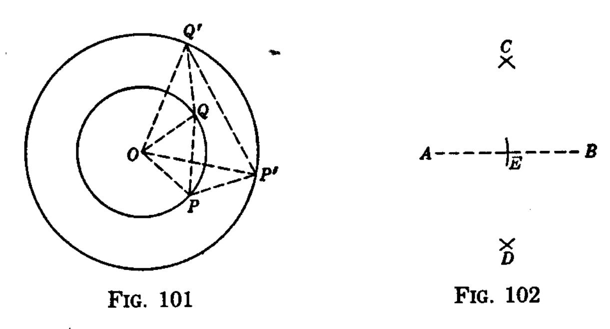


FIG. 101 FIG. 102

ferencia en Q. Ahora, con un radio conveniente y con P y Q como centros sucesivos dibujamos arcos que intersecan la segunda circunferencia en P' y Q' (como en la Fig. 101) respectivamente. El segmento $P'Q'$ es la cuarta proporcional buscada. La demostración depende de la semejanza de los triángulos OPQ y $OP'Q'$, esta semejanza es una consecuencia inmediata de la congruencia de los triángulos OPP' y OQQ'.

PROBLEMA 4. *Bisecar un segmento de línea dado.*

Varias soluciones a este problema fueron dadas por Mascheroni. La que damos aquí se obtiene fácilmente de las construcciones anteriores (Fig. 102).

Si AB es el segmento que se va a bisecar determínense los puntos distintos C y D tales que $AC = BC = AD = BD$. Entonces constrúyase el cuarto proporcional al diámetro de una circunferencia, su radio, y AB; constrúyase también la cuarta proporcional al diámetro de una circunferencia, su radio y CD. Con la primera de estas cuartas proporcionales como radio y A como centro, trácese un arco, y con la segunda como radio y C como centro trácese un arco que corte al anterior. Entonces E, uno de los dos puntos de intersección de los arcos estará dentro del rombo $ACBD$ y es el punto medio de AB.

PROBLEMA 5. *Determinar el punto de intersección de dos líneas rectas.*

Sean AB y CD las líneas cuyo punto de intersección se va a encontrar. Construya los simétricos C' y D' de C y D con respecto a la línea AB. En seguida determine E tal que $CC'ED$ sea un paralelogramo. Entonces D', D y E son colineales. Ahora determínese la cuarta proporcional de $D'E$, $D'D$, $C'E$ y usándola como radio y D y D' como centros puede hallarse un punto F que está sobre CD, $C'D'$ y AB. Entonces F es el punto de intersección buscado.

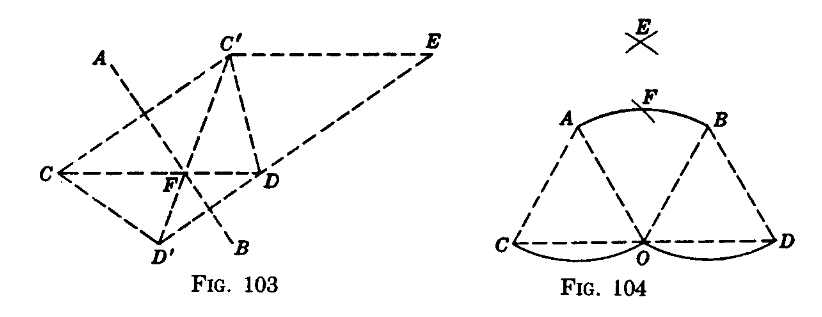


FIG. 103 FIG. 104

PROBLEMA 6. *Bisecar un arco de una circunferencia cuyo centro es conocido.*

El punto medio F de un arco AB cuyo centro es O (Fig. 104) puede encontrarse como sigue. Determine C y D de tal manera que $ACOB$ y $AODB$ sean paralelogramos. Con C y D como centros y con radios iguales a CB trácense arcos que se corten en E. Entonces, con OE como radio y C como centro, trácese un arco que corte a AB. El punto F de intersección así determinado puede mostrarse que es el punto medio del arco AB.

PROBLEMA 7. *Determinar las intersecciones de una circunferencia y una línea recta.*

Si el centro de la circunferencia no está dado puede hallarse fácilmente por medio de las construcciones dadas en los problemas anteriores. Supongamos que la línea está determinada por dos de sus puntos A y B y sea O el centro de la circunferencia dada. Constrúyase O', el simétrico de O respecto a AB. Si O' es distinto de O,

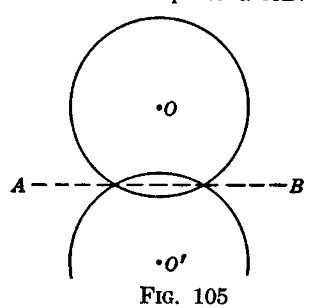


FIG. 105

una circunferencia con O' como centro y radio igual al del círculo dado intersecará al último en los puntos comunes a él y a la línea AB, si tales puntos existen.

Queda el caso en que O' coincide con O. AB entonces pasa por el centro de la circunferencia dada y las intersecciones son los puntos medios de los arcos PQ, donde P es un punto arbitrario de la circunferencia y Q es su simétrico respecto a la línea AB.

Hemos mostrado ahora que el punto de intersección de dos líneas y los puntos de intersección de una línea y una circunferencia pueden construirse por medio del compás solamente. Se concluye que toda construcción que es posible con regla y compás es posible con el solo compás.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál de los polígonos regulares con $n \leqq 100$ puede construirse con regla y compás?

2. Muéstrese que un ángulo puede trisecarse con una regla, *en la cual hay marcado un segmento,* y un compás procediendo como sigue: siendo AOB el ángulo que va a ser trisecado, trácese una circunferencia con O como centro y con la longitud del segmento marcado como radio. Colóquese la regla, de la cual DC es el segmento marcado, de modo que la línea de la regla pase por B, C esté en la circunferencia y D caiga en la prolongación de AO (Fig. 106).

3. Probar que es imposible con regla y compás, trazar una línea recta que pase por el vértice A de un rectángulo $ABCD$ (Fig. 107) tal que en él un segmento PQ de longitud arbitraria dada sea determinado por CD y la prolongación de BC.

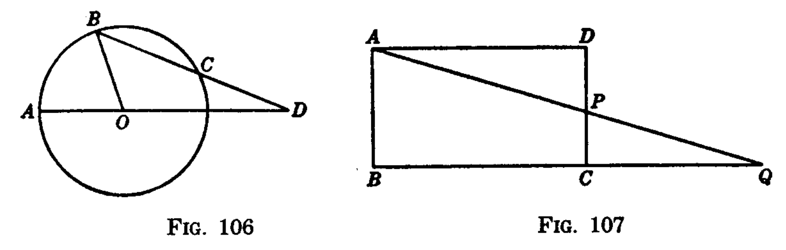


FIG. 106 FIG. 107

4. Demostrar que es imposible construir un ángulo de 1° con regla y compás.

5. Por un punto dado dibujar una paralela a una línea dada usando una regla de lados paralelos. Se desea una solución más elemental que la sugerida por la Sección 11.4.

6. Dada una línea recta en la cual $AB = BC$. Con regla solamente, divídase AB en n partes iguales.

7. Dado un paralelogramo, una línea y un punto fuera de la línea. Con la regla solamente, dibujar una línea por el punto dado paralela a la línea dada.

8. Resolver los problemas sugeridos en la Sección 11.5 que completan la prueba de que todos los problemas solubles con regla y compás son solubles con regla y circunferencia fija.

11.8 División de la circunferencia en arcos iguales. Se han dado ya construcciones en la sección anterior por medio

de las cuales puede dividirse la circunferencia en dos, tres y seis partes iguales. Supongamos construidos los arcos AB, BC, CD (Fig. 108), cada uno de los cuales es igual a un sexto de la circunferencia. Entonces, con A y D como centros y con AC como radio dibújense arcos que se corten en E. Si indicamos por a el radio de la circunferencia dada, entonces $AC = a\sqrt{3}$ y $OE = a\sqrt{2}$. Así, con OE como radio y A como centro puede dibujarse una circunferencia que corten la circunferencia dada en F, G y A, F, D, G dividen la circunferencia en cuatro arcos iguales, También de ahí se sigue inmediatamente que el arco BF es una doceava parte de la circunferencia y que, por medio del uso repetido del compás con radio AB, el resto de los puntos que dividen la circunferencia en doce arcos iguales pueden ser construidos. Siguiendo a Mascheroni, compases fijos con los radios a, $a\sqrt{3}$, y $a\sqrt{2}$ serán llamados el *primero*, *segundo* y *tercer* compás respectivamente.

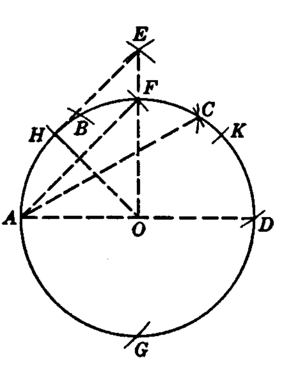


FIG. 108

Con el primer compás, y con E como centro, trace arcos que corten la circunferencia en H y K. Entonces, A, H, F, K, D dividen la semicircunferencia en arcos, cada uno igual a un octavo de la circunferencia. Los puntos de división correspondientes sobre la otra semicircunferencia pueden encontrarse por medio del tercer compás. Estas construcciones también proporcionan un arco HB igual a un veinticuatroavo de la circunferencia. El resto de los puntos de subdivisión para veinticuatro arcos iguales pueden construirse con el uso repetido de los tres compases.

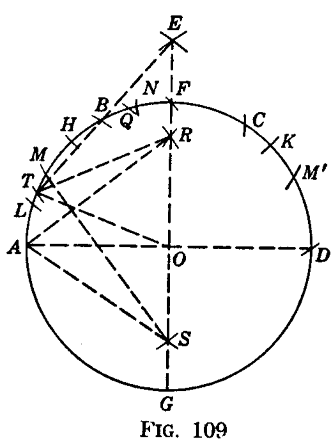


FIG. 109

11.9 Divisiones adicionales de la circunferencia. La circunferencia ha sido dividida en veinticuatro partes iguales y siendo L, M, H, B, N, los puntos de división del cuadrante

AF (Fig. 109), tomemos un cuarto compás fijo de radio *EM*. La longitud de este radio se demuestra fácilmente que es igual $a\sqrt{3 - \sqrt{2}}$. Con este compás y con *A* y *D* como centros, descríbanse arcos que se intersequen en *R*. Entonces, si con el primer compás y con *R* como centro dibujamos un arco que interseque *LM* en *T*, los arcos *LT* y *TM* son iguales, y cada uno vale un cuarentaiochoavo de la circunferencia.

Para verificar esto, demostraremos lo siguiente: $OR = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; sen $\widehat{AT} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$; $\widehat{AT} = 22½°$; y de aquí $\widehat{LT} = 7½°$. Todos los puntos de división restantes para los cuarenta y ocho arcos iguales pueden construirse por medio de los cuatro compases fijos anteriormente usados.

Para dividir la circunferencia en cinco partes iguales, se usa un cuarto compás fijo cuyo radio es *AS*. Aquí *S* es la intersección de los arcos cuyos centros son *M* y su simétrico *M'*, con respecto a *OF*, y cuyos radios son el del tercer compás. El radio del quinto compás se encuentra que es $\frac{a}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, y consecuentemente el arco *AQ* cuya cuerda es este radio, es un quinto de la circunferencia.

Se observará que todas las divisiones en esta sección y la anterior, se realizaron con cinco compases fijos. Más aún, excepto por el centro del círculo y los puntos en la circunferencia, solamente los tres puntos *E*, *R* y *S* se han usado para hacer estas divisiones. Se puede mostrar que, con estos cinco compases y sin puntos adicionales distintos a los que están en la circunferencia, los puntos de división para diez, veinte, ciento veinte y doscientas cuarenta partes iguales pueden también determinarse.

11.10 Simplicidad y exactitud de las construcciones. Si tenemos a la mano algunas soluciones diferentes de un problema geométrico que necesita hacerse con alguna construcción, podemos hacernos las preguntas: ¿Cuál es la más simple? y ¿cuál es la más exacta? Obviamente antes de que estas preguntas puedan ser contestadas, será necesario tener definiciones de simplicidad y exactitud, que puedan aplicarse a tales construcciones.

Definiciones de estos términos fueron dadas por Lemoine.

Están basadas en las siguientes operaciones que pueden realizarse con regla y compás:

1. Colocar el filo de la regla en un punto dado.
2. Dibujar una línea recta.
3. Colocar un punto del compás en un punto dado.
4. Colocar un punto del compás en una línea (recta o curva).
5. Dibujar una circunferencia o un arco de circunferencia.

La suma del número de veces que todas estas operaciones se realizan en el desarrollo de una construcción dada, es llamada su *simplicidad*. La suma del número de veces que cada una de las operaciones 1, 3 y 4 son realizadas, es llamada su *exactitud*. Vamos a señalar la simplicidad y exactitud de una construcción geométrica dada, por S y E respectivamente.

Como un ejemplo, podemos usar la construcción ordinaria para la bisección de un ángulo. Aquí, $S = 9$ y $E = 5$, ya que la primera de las operaciones anteriores se realiza dos veces, la segunda una, la tercera tres y la quinta tres.

Que el criterio anterior para la exactitud y simplicidad no es tan satisfactorio como se desea, se ve fácilmente. Por ejemplo, el punto de intersección de dos líneas rectas, se sitúa con mayor precisión cuando las líneas se intersecan a ángulos grandes, que cuando son casi paralelas, y como una consecuencia su intersección se aleja de los puntos que determinan las líneas. El criterio de Lemoine, no toma en cuenta tales diferencias.

EJERCICIOS

1. Construir todos los puntos que dividen a una circunferencia en veinticuatro partes iguales, usando solamente el primero, segundo y tercer compás.
2. Completar la división de la circunferencia en cuarenta y ocho partes iguales, como se sugiere en la Sección 11.9.
3. Hacer una construcción de compás para un pentágono regular sin usar el quinto compás de la Sección 11.9.
4. Construir por medio del compás solamente un arco de 3°.
5. Determinar E y S para la construcción del problema de la Sección 2.12.

6. Haga una construcción tan sencilla como le sea posible de un pentágono regular, primero solamente con compás, luego con regla y compás. Compare *E* y *S* para estas soluciones.

7. Compare *E* y *S* para la construcción de una cuarta proporcional a tres segmentos de línea dados como se dio en el Prob. 3, Sección 11.7, con la construcción de una cuarta proporcional de un libro de texto de geometría para secundaria.

8. Usando compás solamente, construya la polar de un punto *P* y el inverso de *P* con respecto a una circunferencia dada.

9. Usando compás solamente, construya una circunferencia ortogonal a cada una de tres circunferencias dadas.

10. Dado un triángulo, su circunferencia circunscrita, y su circuncentro. Se pide: construir su punto mediano, su incentro y su ortocentro con regla únicamente.

CAPITULO 12

TEOREMAS Y PROBLEMAS SELECTOS

12.1 El problema de las bisectrices de los ángulos. Este capítulo será dedicado a la discusión de variados teoremas y problemas importantes, y empezaremos con la demostración de un teorema que aparentemente es muy simple, pero que ofrece más dificultad de la que en primera instancia se pudiera ver. Es el inverso de un teorema que cualquier principiante en el estudio de la geometría puede demostrar fácilmente. Sigue una prueba simple por el método indirecto.

TEOREMA: *Si las bisectrices de dos ángulos interiores de un triángulo son iguales, el triángulo es isósceles.*

En el triángulo ABC, sean iguales las bisectrices BM y CN de los ángulos CBA y ACB, y supóngase que el $\angle CBA$ es mayor que el $\angle ACB$. Entonces $\angle CBM > \angle NCB$, de donde

$$CM > BN$$

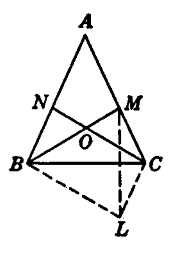


FIG. 110

Dibuje las líneas BL y CL paralelas respectivamente a NC y NB, y dibuje ML. Entonces $BL = NC = BM$, y los ángulos MLB y BML son iguales. También puesto que $LC = BN$, tenemos $CM > LC$ y $\angle CLM > \angle LMC$. Por lo tanto por suma $\angle CLB > \angle BMC$, de donde $\angle BNC > \angle BMC$. Considerando los ángulos de los triángulos BON y MOC, esta última desigualdad nos conduce a concluir que $\angle MBA < \angle ACN$. Esto es contrario a la suposición de que $\angle CBA$ es mayor que $\angle ACB$. De la misma manera podemos establecer una contradicción si suponemos el primero de estos ángulos menor que el segundo. Podemos concluir que son iguales, y en consecuencia el triángulo es isósceles.

12.2 Teorema de Stewart.

TEOREMA: *Si a, b, c son las longitudes de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, y si D es un punto cualquiera en BC para el cual BD = p, y DC = q, entonces representando por x la longitud de AD, tenemos.*

$$ax^2 = pb^2 + qc^2 - apq.$$

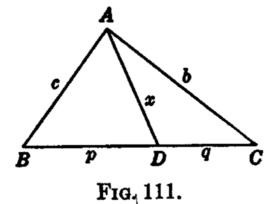


FIG. 111.

Aplicando la ley de los cosenos a los triángulos ABD y ADC, tenemos

$$c^2 = x^2 + p^2 - 2xp \cos ADB,$$

y

$$b^2 = x^2 + q^2 + 2xq \cos ADB.$$

Multiplicando estas ecuaciones por p y q respectivamente, sumando y reduciendo con la ecuación $p + q = a$, se obtiene el resultado deseado.

Este teorema puede usarse para encontrar la longitud de la línea AD cuando D es un punto cualquiera en la línea BC y se conoce la razón en la cual D divide a BC, porque en este caso las longitudes y signos de BD y DC pueden conocerse. En particular, las longitudes de las medianas, las simedianas y las bisectrices de los ángulos de un triángulo, pueden encontrarse por medio del Teorema de Stewart.

Esto sugiere una prueba directa del teorema de la sección anterior. En la Fig. 111, si AD biseca el ángulo A del triángulo dado encontramos $p = \dfrac{ac}{b + c}$ y $q = \dfrac{ab}{b + c}$. El cálculo de $\overline{AD}^2$ da $bc\left[1 - \dfrac{a^2}{(b + c)^2}\right]$, y el cuadrado de la bisectriz del ángulo B es $ca\left[1 - \dfrac{b^2}{(c + a)^2}\right]$. Si la diferencia entre estas dos expresiones se hace igual a cero, la ecuación puede reducirse a

$$(a - b)\cdot f(a, b, c) = 0,$$

donde $f(a, b, c)$ son solamente términos positivos. De aquí $a = b$.

12.3 Distancia entre los centros del incírculo y el circuncírculo. Sean I y O el incentro y el circuncentro del triángulo ABC, y sean D, E, F los puntos en los cuales la circun-

ferencia inscrita es tangente a BC, CA, AB respectivamente. Denotemos por r y R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita por d la distancia entre sus centros, y por P y Q los puntos en los cuales la línea IO interseca la circunferencia circunscrita.

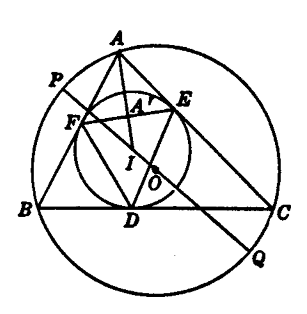


FIG. 112

Si invertimos con respecto al incírculo como circunferencia de inversión, el punto A será invertido en A', punto medio de EF. Entonces la circunferencia circunscrita se invierte en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo DEF, y el diámetro de esta circunferencia es igual a r. También si P' y Q' son los inversos de P y Q respectivamente, la línea $P'Q'$ es un diámetro de esta circunferencia. Más aún,

$$IP' = \frac{r^2}{IP} = \frac{r^2}{R-d}, \quad \text{y} \quad IQ' = \frac{r^2}{IQ} = \frac{r^2}{R+d}.$$

La suma de estas ecuaciones con los debidos signos, nos conduce al resultado deseado. Este resultado se debe a Euler. Y puede ser puesto en la forma del

TEOREMA. *Los radios r y R de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo, y la distancia d entre los centros, están relacionados por la ecuación*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d}.$$

12.4 Teorema de Miquel.

TEOREMA: *Si D, E, F son tres puntos cualesquiera en los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, entonces las circunferencias que pasan por las tercias de puntos B, D, F; C, E, D; A, F, E; tienen un punto en común.*

Para probar el teorema, debemos primero establecer el

LEMA: *Si por un punto cualquiera en el plano del triángulo cuyos lados son las líneas a, b, c, se trazan tres líneas p, q, r, de tal forma que p y b sean antiparalelas con respecto a a y q, y p y c, sean antiparalelas con respecto a a y r, entonces q y c, son antiparalelas con respecto a b y r.*

Puesto que la propiedad de antiparalelismo depende sola-

mente de las direcciones relativas de las líneas involucradas, podemos, sin perder generalidad, tomar el punto de intersección O de las líneas p, q, r, en el triángulo. En la Fig. 113, sean OD, OE, OF, las líneas p, q, r, con notaciones usuales para los lados del triángulo. Entonces del antiparalelismo dado tenemos

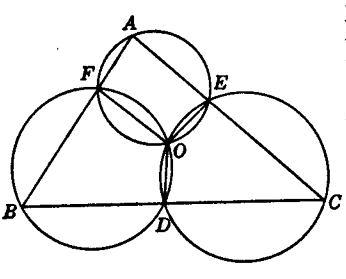


FIG. 113

$$\angle DOE = 180° - C,$$

y

$$\angle FOD = 180° - B;$$

y se sigue de estas ecuaciones que $\angle EOF = 180° - A$. Por lo tanto q y c son antiparalelas con respecto a r y b.

Se concluye ahora el teorema para cualquier posición del punto O, que es común a las circunferencias por B, D, F, y por C, E, D. Ya que el lema garantiza que OF y EA son antiparalelos con respecto a OE y FA, y por lo tanto los cuatro puntos A, F, E, O son concíclicos.

El punto O es llamado el *punto Miquel* de la tercia D, E, F, con respecto al triángulo ABC; el triángulo DEF, cuando D, E y F no son colineales, es llamado un *triángulo de Miquel* de O; y las tres circunferencias del teorema son llamadas *circunferencias de Miquel* de los puntos D, E, F.

Las consecuencias de este teorema son numerosas e importantes.

12.5 Cuadrilátero completo y la línea de Simson. Para ilustrar la importancia del Teorema de Miquel, lo usaremos para probar dos teoremas que hemos visto en el Cap. 5. Estos teoremas íntimamente aparecieron relacionados y su relación se ve ahora resaltada por el hecho de que ambos pueden ser considerados como corolarios del Teorema de Miquel.

TEOREMA: *Las circunferencias circunscritas de los cuatro triángulos cuyos lados son los lados de un cuadrilátero completo, tomados tres a un tiempo, tienen un punto en común* (Sección 5.11).

En la Fig. 114, sea el cuadrilátero que consiste de las cuatro líneas, y sea O el punto Miquel de la tercia colineal

D, E, F, con respecto al triángulo ABC. Considerando también el triángulo FBD y la tercia de puntos C, E, A, dos de cuyas circunferencias de Miquel pasan por O, se infiere que la tercera circunferencia por los puntos A, B, C, también pasa por O.

TEOREMA: *Si desde cualquier punto de la circunferencia circunscrita de un triángulo, bajamos perpendiculares a los tres lados, los pies de estas perpendiculares están en una línea recta.* (Sección 5.8.)

Sea O el punto en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC; D, E, F los pies de las perpendiculares de O a los lados; y EF corta a BC en D'. Ahora las cuatro circunferencias que circunscriben los triángulos del cuadrilátero completo

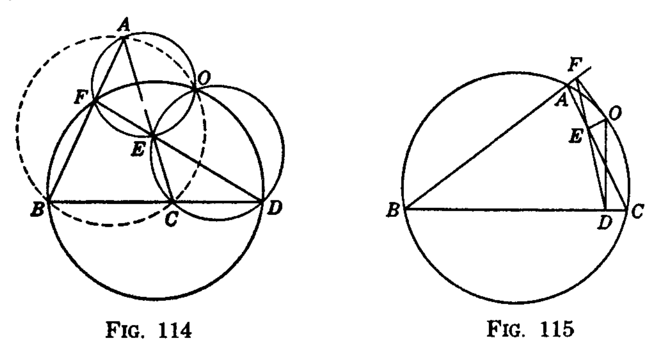


FIG. 114 FIG. 115

cuyos lados son AB, BC, CA, FD', pasan por O, y una de estas circunferencias es circunscrita al triángulo CED'. Pero también, O, E, D, C son concíclicos. De donde, estas dos circunferencias que tienen los puntos O, C, E en común, coinciden, y en consecuencia D' coincide con D. Entonces los puntos D, E, F son colineales.

12.6 Teorema de Carnot.

TEOREMA: *Si una circunferencia interseca los lados BC, CA, AB del triángulo ABC en los puntos D, D'; E, E'; F, F'; respectivamente, entonces*

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}=1.$$

Supongamos que DE y $D'E'$ intersecan a AB en G y G' respectivamente. Entonces, aplicando el Teorema de Me-

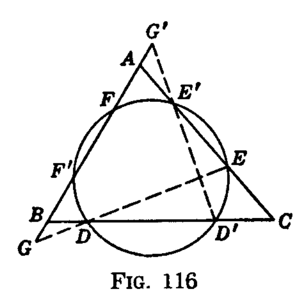


FIG. 116

nelao al triángulo ABC con transversales EG y $E'G'$, tenemos

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1, \qquad (1)$$

y

$$\frac{AG'}{G'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = -1. \qquad (2)$$

también AB es una transversal que corta los lados del cuadrángulo inscrito $DED'E'$ y la circunferencia en puntos en involución (Sección 10.9). De aquí

$$\{ABF'G'\} = \{BAFG\} = \{ABGF\}.$$

Esto es

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{AF'}{F'B} = \frac{AG}{GB} \cdot \frac{AG'}{G'B}.$$

Esto junto con las Ecs. (1) y (2) por multiplicación y reducción, da la relación del teorema.

El Teorema de Carnot, nos da otra prueba del teorema del hexágono de Pascal (Sección 9.6). En el hexágono inscrito $ABCDEF$, con lados que se intersecan como se muestra en la Fig. 117, se desea probar que los puntos P, Q, R son colineales. No se darán los detalles de esta prueba, pero pueden obtenerse, aplicando sucesivamente el Teorema de Menelao al triángulo LMN, con las líneas PDE, QCB y

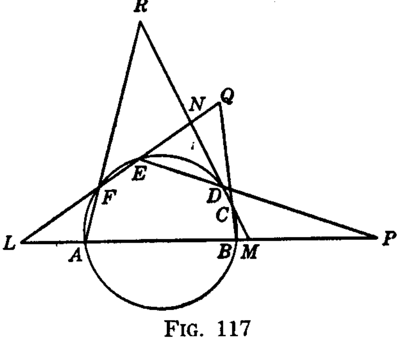


FIG. 117

RFA como transversales, multiplicando las ecuaciones obtenidas, simplificando por medio del Teorema de Carnot, e interpretando los resultados.

12.7 El problema de Apolonio. Se dio una solución del problema de Apolonio y se sugirió una más elemental en un ejercicio (Sección 9-11, Ejercicio 10). Tomando en cuenta el gran interés histórico ligado a este problema, atestiguado por el hecho de que ha llamado la atención de muchos geómetras y que ha sido resueltó en varias maneras, daremos otra solución muy conocida debida a Gergonne. Esta solución es aplicable cuando los centros de las circunferencias no son colineales.

Empezaremos con la observación, de que si una circunferencia es tangente a otras dos, los puntos de contacto son antihomólogos con respecto a uno de los centros de similitud de las dos circunferencias. Por conveniencia de exposición, diremos que una circunferencia tiene contacto semejante o no semejante, con dos circunferencias a las que es tangente, de acuerdo si los puntos de contacto son antihomólogos con respecto al centro de similitud externo o interno. Se sigue que si una circunferencia contiene dentro de ella ambas o ninguna de las dos circunferencias a las cuales es tangente, tiene contactos semejantes con las dos, y si contiene a una pero no a la otra de estas circunferencias, tiene contactos no semejantes con ellas.

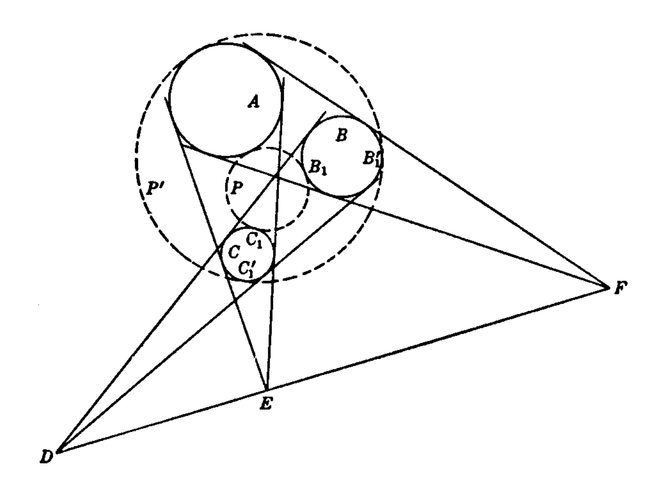


FIG. 118

Por claridad, consideremos que las tres circunferencias A, B, C (Fig. 118) están completamente una fuera de las otras, y sean P y P' las dos circunferencias que hacen contacto semejante con cada par de las circunferencias dadas. También, sean D, E, F los centros de similitud externos de las circunferencias B, C; C, A; A, B; respectivamente. Aplicando el inverso del Teorema de Menelao al triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias dadas, encontramos que D, E, F están en una línea recta. Esta línea es el eje radical de las circunferencias P y P'. Señalando por B_1, C_1 y B'_1, C'_1 los puntos en los cuales las circunferencias B y C tocan P y P', respectivamente, tenemos $DB_1 \cdot DC_1 = DB'_1 \cdot DC'_1$. Así las potencias de D con respecto a P y P' son iguales; y en forma similar para los puntos E y F.

La circunferencia C hace contactos no semejantes con P y P' y por lo tanto la línea $C_1C'_1$ pasa por el centro de similitud interno de P y P'. Asimismo, la línea que une los puntos en los cuales B toca estas dos circunferencias, y la que une los puntos en los que A toca a ellas, pasan por el mismo punto; y este punto común es el centro radical de las circunferencias A, B, C.

Puesto que tangentes a dos circunferencias en puntos antihomólogos se intersecan en su eje radical, la línea $C_1C'_1$ es la polar de F con respecto a la circunferencia C, y se sigue que el polo de DF está en $C_1C'_1$. Así los puntos en los que las circunferencias P y P' tocan C pueden construirse como las intersecciones de C con la línea que une el polo de DF, con respecto a C, con el centro radical de las tres circunferencias dadas. De la misma forma es posible encontrar los puntos en los cuales las circunferencias P y P' tocan cada una de las otras dos circunferencias. Pueden dibujarse entonces las circunferencias buscadas.

Los centros de similitud están por tercias en cuatro líneas. Procediendo en una forma similar con respecto a cada una de las otras de estas cuatro líneas y los centros de similitud que están en ellas, podemos construir las circunferencias restantes por pares, cuando existan. Cuál de los pares indicados existe, depende de si las líneas que unen el centro radical a los tres polos de la línea correspondiente intersecan las circunferencias respectivas.

12.8 Cadena de Steiner de circunferencias. Si una serie de circunferencias es en número finito, y cada uno de sus miembros es tangente a dos circunferencias fijas que no se intersecan, y si más aún, cada circunferencia de la serie, es tangente a otras dos de la serie, la serie es llamada una *Cadena de Steiner de Circunferencias*. Cuando existe tal situación, diremos que las dos circunferencias fijas tienen una cadena de Steiner y llamaremos brevemente a la cadena de circunferencias, una cadena de Steiner.

Supóngase que tenemos una de estas cadenas de n circunferencias señalando a cada uno de sus miembros por $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y las circunferencias a las cuales son tangentes son C_1 y C_2. Sea también su colocación, tal que c_i es tangente a c_{i-1} y a c_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ c_0 = c_n,\ c_{n+1} = c_1)$. Se puede demostrar que existe una inversión para la cual C_1 y C_2 se transforman en dos circunferencias concéntricas desiguales C'_1 y C'_2. Sea O el centro común de estas circunferencias transformadas, y señalemos por (I) la inversión usada. Entonces las circunferencias c_i son evidentemente transformadas por esta inversión en una serie de circunferencias iguales c'_i contenidas en la corona entre C'_1 y C'_2 y que tienen la misma propiedad de tangencia respecto a sus vecinos anteriores y posteriores como las circunferencias de la cadena dada. Por lo tanto ellas mismas constituyen una cadena Steiner que llamaremos la *cadena de Steiner asociada* a la cadena original.

Las circunferencias de la cadena Steiner asociada, pueden cada una avanzarse cíclicamente en la corona en que están para formar una cadena similar, y esto puede hacerse en un número infinito de formas. Cuando invertimos uno de estos nuevos arreglos con (I) obtenemos como resultado una cadena Steiner para C_1 y C_2, que en general es diferente de la cadena original con que partimos. Esto da el

TEOREMA: *Si dos circunferencias tienen una, tienen un número infinito de cadenas de Steiner, todas ellas con el mismo número de circunferencias.*

Puede ser que en la cadena de Steiner asociada, las n circunferencias c'_i, rodeen p veces la corona, si esto sucede, cada una subtiende en O el ángulo $\frac{2\pi p}{n}$. Cuando la inversión (I) se aplica a esta cadena, las circunferencias C'_1 y C'_2

se invierten en C_1 y C_2, un par de circunferencias que determinan un grupo coaxial cuyos puntos límites son el centro de inversión L, y el inverso L' del punto O. Las líneas por O,

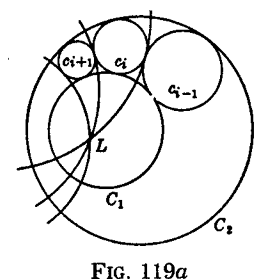


FIG. 119*a*

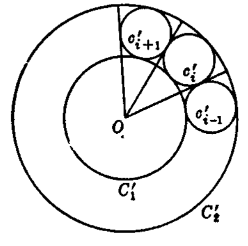


FIG. 119*b*

tangentes a las circunferencias c'_i se transforman en circunferencias tangentes a las circunferencias c_i en los puntos de contacto de éstas con sus vecinas en la cadena, y que pasan por los puntos límite L y L'. Más aún, estas circunferencias son ortogonales a C_1 y C_2 y el ángulo en el cual un par adyacente se interseca es $\dfrac{2\pi p}{n}$.

Si r_1 y r_2 son los radios de las circunferencias concéntricas de la cadena de Steiner asociada, y si las n circunferencias de la cadena rodean la corona p veces, entonces la relación

$$\operatorname{sen} \frac{\pi p}{n} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

vale entre las cantidades involucradas.

12.9 El árbelos. Sea C un punto cualquiera en el segmento de línea AB entre A y B, trácense semicircunferencias en el mismo lado de AB y de diámetros AB, AC, CB. Entonces la figura cuyos contornos son estas circunferencias es un *árbelos* o una *navaja de zapatero.* Este último nombre le fue dado por Arquímedes, que estudió sus propiedades, algunas de las cuales se darán aquí.

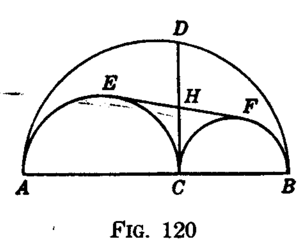


FIG. 120

Sean los radios de las circunferencias en AB, AC, CB; r, r_1, r_2, respectivamente. Tracemos la perpendicular a AB por C,

intersecando la circunferencia más grande en D. También sean E y F los dos puntos de contacto de la tangente directa común a las dos semicircunferencias en AC y CB respectivamente. Las siguientes propiedades se verifican fácilmente:

(*a*) El perímetro del árbelos es igual al de la circunferencia de diámetro AB.

(*b*) El área del árbelos es igual al área del círculo de diámetro CD.

(*c*) El segmento de la tangente común EF es igual a CD, y estas dos líneas se bisecan una a otra en H. Entonces $ECFD$, es un rectángulo y el centro de su circunferencia circunscrita es H.

(*d*) Los puntos A, E, D son colineales así como B, F, D.

Ahora probaremos:

(*e*) Si se dibuja una circunferencia tangente a CD y a las semicircunferencias de diámetros AB y AC, y otra se dibuja tangente a CD y a las semicircunferencias de diámetros AB y CB, estas dos circunferencias son iguales.

La primera de estas circunferencias toca la línea CD en P, la semicircunferencia de diámetro AC en Q, y la semicircunferencia de diámetro AB, en R, siendo SP el diámetro a través de P. Entonces es fácil demostrar que las tercias A, Q, P; A, S, R; B, P, R; y C, Q, S son colineales, y que si T es el punto de intersección de AS y CD, las líneas BT y CS son paralelas. De esto se sigue que

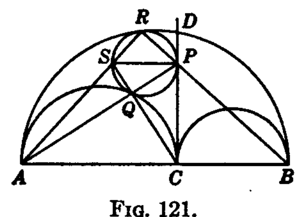


FIG. 121.

$$\frac{SP}{AC} = \frac{ST}{AT} = \frac{CB}{AB},$$

y

$$SP = \frac{r_1 r_2}{r}.$$

La simetría demuestra que el diámetro de la otra circunferencia inscrita, tiene la misma longitud.

(*f*) Las líneas RB y AB son antiparalelas con respecto a CD y AR, y los puntos A, R, P, C son concíclicos.

(*g*) El punto B tiene iguales potencias respecto a las circunferencias de diámetros SP y AC, de lo que se concluye que la tangente común a estas circunferencias en Q pasa por B.

12.10 La circunferencia de Spieker. En la Sección 5.5 conocimos la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo y dedicamos algún tiempo a desarrollar propiedades interesantes de esta circunferencia. Hay otra circunferencia que merece notarse porque en varias formas es estrictamente análoga a la circunferencia de los nueve puntos. Es la circunferencia inscrita al triángulo cuyos vértices son los puntos medios de un triángulo dado, y que es llamada la *circunferencia* de *Spieker* del triángulo. Notamos en seguida que su diámetro es la mitad del diámetro del incírculo del triángulo.

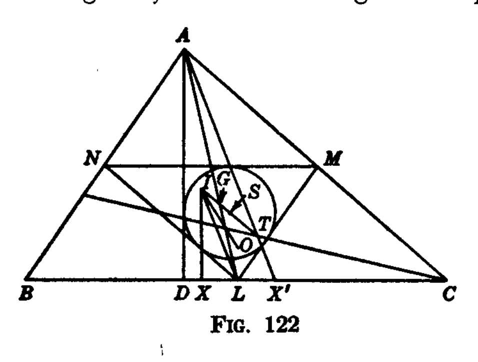


FIG. 122

Serán usadas las notaciones usuales para los vértices del triángulo, los puntos medios de sus lados, los pies de las alturas, su área, su ortocentro, circuncentro, incentro, punto mediano (Fig. 122). Sea S el centro de la circunferencia de Spieker, X y X' los puntos en los que BC es tocada por la circunferencia inscrita y aquella circunferencia excrita que es tangente internamente al lado BC y sea T el punto Nagel (Ejercicio 10, Pág. 59). Se necesitarán algunos resultados que damos ahora, y los cálculos para aquellos que no es fácil deducir, serán indicados.

(*a*) $BD = X'C = s - b;\ BX' = s - c;\ XL = \dfrac{b-c}{2}.$

(*b*) $IX = \dfrac{\Delta}{s};\ AD = \dfrac{2\Delta}{a}.$

(*c*) $DX' = BX' - BD = s - c - c\cdot\cos B = \dfrac{s(b-c)}{a}.$

(*d*) $AX' = \dfrac{s}{a}\cdot AT.$

Esta última relación se obtiene aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ABX' con CT como transversal.

Por (*a*), (*b*), y (*c*) encontramos que

$$IX : XL = AD : DX',$$

y de aquí los triángulos rectángulos IXL y ADX' son semejantes de lo que vemos que IL es paralela a AX', también, de estos triángulos semejantes y de las relaciones (*b*) y (*d*), $AT = 2IL$. Se sigue que son semejantes los triángulos ILG y TAG; que I, G, y T son colineales; y que $GT = 2IG$.

Si S' es el punto medio de IT, tenemos de la semejanza de los triángulos $LS'G$ y AIG, que LS' es paralelo a AI, y por lo tanto que LS' biseca el ángulo MLN. En consecuencia S' coincide con S, el centro de la circunferencia de Spieker.

TEOREMA: *El punto Nagel, el punto mediano, el centro de la circunferencia de Spieker, y el incentro de un triángulo son colineales y están separados armónicamente; más aún, el punto Nagel y el punto mediano son los centros de homotecia de la circunferencia de Spieker y de la circunferencia inscrita del triángulo.*

Si P, Q, R son los puntos medios de AT, BT, CT, el triángulo PQR es homotético al triángulo ABC en la razón 1:2 con N como centro de homotecia. De aquí los triángulos PQR y LMN son congruentes y ambos están circunscritos a la circunferencia de Spieker. También se puede demostrar que AT pasa por el punto de tangencia de MN con la circunferencia de Spieker, que TX pasa por el punto en el cual esta circunferencia es tangente a QR, y que estos puntos de tangencia son colineales con S.

La analogía entre las propiedades de la circunferencia de los nueve puntos y la circunferencia de Spieker de un triángulo es aparente.

EJERCICIOS

1. Dar una prueba del Teorema de Carnot, basada completamente en teoremas conocidos por Euclides.
2. Encontrar las longitudes de las medianas y simedianas de un triángulo en función de las longitudes de sus lados.
3. Demostrar que los centros de un conjunto de circunferencias de Miquel respectivas a un triángulo son los vértices de un triángulo semejante al triángulo dado.
4. Construir un árbelos, teniendo el radio de la semicircunferencia más grande y el diámetro de las circunferencias inscritas en los triángulos curvilíneos en que es dividido por la perpendicular a la base en C (Fig. 121).
5. Los radios de dos circunferencias son R y r ($R > r$), y d es la distancia entre sus centros. Demostrar que si $\frac{1}{r} = \frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d}$,

hay un número infinito de triángulos de los cuales ellas son las circunferencias circunscrita e inscrita

6. Encontrar la distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita de un triángulo y el centro de una de sus excircunferencias en función de los radios de estas circunferencias.

7. Construir una cadena de Steiner de seis circunferencias, donde las dos circunferencias tangentes a cada uno de los miembros de la cadena no son concéntricas.

8. Una cadena de Steiner, consiste en quince circunferencias que circundan la corona entre dos circunferencias concéntricas, dos veces. Encontrar la razón entre los radios de las circunferencias concéntricas.

9. En el árbelos de la Fig. 121, se traza una línea por A, tangente a la semicircunferencia de diámetro CB, el punto de tangencia siendo F, BF cortará CD en G. Encontrar el punto G', que junto con A, B y G constituyan un grupo ortocéntrico de puntos.

10. El árbelos de la Fig. 121 y las circunferencias inscritas en los dos triángulos curvilíneos, son invertidos con respecto a A como centro y AB como radio de inversión. Describa y estudie la figura resultante.

11. Dado un árbelos y la línea CD (Fig. 120). Construir las dos circunferencias que son tangentes cada una a la línea CD y a dos semicircunferencias de la frontera del árbelos.

12. Demostrar que el incentro de un triángulo es el punto Nagel del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado.

13. En la Fig. 122, demostrar que IL y TX se intersecan en la circunferencia de Spieker en el punto medio de TX.

14. Demostrar por el argumento de la Sección 12.7 que cuando tres circunferencias se intersecan una a la otra, existen ocho circunferencias tangentes a cada una.

15. La línea determinada por el incentro de un triángulo y el punto medio de uno de sus lados, interseca el segmento que une los puntos medios de los otros dos lados. ¿En qué razón el punto de intersección divide ese segmento?

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS VARIADOS

1. Un cuadrado y un hexágono regular, tienen perímetros iguales. Encontrar la razón de sus áreas.

2. Inscribir en un rombo dado un cuadrado cuyos lados sean paralelos a las diagonales del rombo.

3. Inscribir en un arco de circunferencia, un rectángulo semejante a un rectángulo dado

4. Construir un paralelogramo tal que tres de sus lados tengan como puntos medios tres puntos dados.

5. Construir un triángulo teniendo sus ángulos y su área.

6. En una circunferencia dada, construir una cuerda que sea trisectada por dos radios dados.

7. Construir un triángulo dadas sus alturas.

8. Construir un triángulo, teniendo dos de sus lados y la diferencia de los ángulos opuestos a estos lados.

9. Construir un cuadrilátero, teniendo sus cuatro lados y el segmento de línea que une los dos puntos medios de un par de lados opuestos.

10. Construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén en tres líneas paralelas dadas respectivamente.

11. Dividir un arco de una circunferencia, en dos partes tales que sus cuerdas tengan una razón dada.

12. Si dos cuerdas de una circunferencia se intersecan en ángulos rectos, la suma de los cuadrados de las cuatro cuerdas correspondientes, a los segmentos es igual al cuadrado del diámetro.

13. Si PQ es un diámetro de una circunferencia de la cual PR y QS son cuerdas que se intersecan en T, entonces la circunferencia determinada por R, S y T es ortogonal a la circunferencia dada.

14. Construir un triángulo cuyos lados sean iguales y paralelos a las medianas de un triángulo dado.

15. El lado de un cuadrado inscrito en un triángulo, es la mitad de la media armónica entre la base y la altura.

16. Cuatro cantidades a, b, A, B son tales que

(1) si $a = b$, entonces $A = B$;
(2) si $a > b$, entonces $A > B$;
(3) si $a < b$, entonces $A < B$.

Demostrar que es verdadero el inverso de cada uno de estos teoremas.

17. Si AD, BE, CF, son las alturas del triángulo ABC, demostrar que una condición necesaria y suficiente para que los lados AB y CA sean iguales es que los triángulos BDF y DCE tengan la misma área.

18. Dibujar una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias dadas y pase por un punto dado.

19. Construir un triángulo semejante a un triángulo dado y que tenga como circunferencia de los nueve puntos una circunferencia dada.

20. AB es el diámetro de una de dos circunferencias que tienen a P como punto de intersección. AP y BP intersecan la otra circunferencia en C y D respectivamente. Demostrar que el ángulo formado por AB y CD es igual al ángulo de intersección de las dos circunferencias.

21. Los triángulos equiláteros BCD, CAE, ABF son construidos por afuera de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC. Demostrar que AD, BE, CF son concurrentes. Generalizar.

22. ¿Qué otros hechos pueden establecerse acerca de las líneas AD, BE, CF del ejercicio anterior?

23. AB, BC, CD son tres lados consecutivos de un hexágono regular, y P es un punto cualquiera en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita. Demostrar que la razón de $PA + PD$ a $PB + PC$ es igual a $\sqrt{3} + 1$.

24. Una cuerda variable de una circunferencia subtiende un ángulo recto desde un punto fuera de la circunferencia. Demostrar que el lugar geométrico de su polo es una circunferencia.

25. El área de un cuadrilátero cíclico cuyos lados son a, b, c, d y cuyo semiperímetro es s, es $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

26. El área de un cuadrilátero cíclico cuyos lados son a, b, c, d y que es también circunscrito a una circunferencia, es $\sqrt{abcd}$.

27. Construir un triángulo semejante a un triángulo dado y teniendo sus vértices en tres líneas dadas.

28. Construir un rectángulo, semejante a un rectángulo dado, tal que cada uno de sus lados pase por un punto dado.

29. Si se bajan perpendiculares desde un vértice de un triángulo a las bisectrices de los ángulos interno y externo de los otros dos vértices, los cuatro pies de estas perpendiculares son colineales.

30. Encontrar las longitudes de las diagonales de un cuadrilátero cíclico en función de sus lados. Con estos resultados probar el Teorema de Ptolomeo.

31. En un triángulo equilátero dado inscribir otro triángulo equilátero cuya área sea la mitad del área del triángulo dado.

32. Los vértices de un triángulo son los excentros del triángulo-pedal.

33. En un triángulo dado inscribir un triángulo con sus lados paralelos a tres líneas dadas.

34. Demostrar que el diámetro de la circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo es menor que la mitad de la hipotenusa.

35. Construir un paralelogramo teniendo la distancia entre los pares de lados paralelos y el ángulo entre las diagonales.

36. I es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC, L es el punto medio de BC, y J es el punto medio de AP, donde P es el punto de contacto de la circunferencia inscrita con BC. Demostrar que I, J, L son colineales.

37. Si tres circunferencias se cortan en un punto que es concíclico con sus centros, sus otras intersecciones son colineales.

38. Si los cuatro puntos A, B, C, D son concíclicos, y si el haz $O(ABCD)$ es armónico, y O es un quinto punto en la circunferencia, entonces

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

39. Si un cuadrilátero convexo se circunscribe a una circunferencia la línea que une los puntos medios de sus diagonales pasa por el centro de la circunferencia.

40. Dibujar por un punto dado en un lado de un cuadrilátero una línea que bisecte el cuadrilátero.

41. En un triángulo dado inscribir un triángulo equilátero que tenga como uno de sus vértices un punto dado en uno de los lados del triángulo dado.

42. Obtenga una condición necesaria y suficiente para que dos puntos sean mutuamente inversos con respecto a cada una de dos circunferencias.

43. Si A, B, C, D son cuatro puntos colineales cualesquiera muéstrese por inversión que

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

44. Hállese un punto desde el cual tangentes a dos circunferencias dadas formen un ángulo dado y una de las tangentes tenga longitud dada.

45. Las perpendiculares a los lados de un triángulo en los puntos en que ellas son tangentes a las circunferencias excritas son concurrentes.

46. Si dos puntos, P, Q, separan armónicamente a cada una de las parejas de puntos A, A'; B, B'; C, C'; entonces $\{AA'BC\} = \{A'AB'C'\}$.

47. El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura sobre el tercer lado y el diámetro de la circunferencia circunscrita.

48. Hállese un punto en cada una de dos líneas dadas tal que el segmento de línea que los une subtienda ángulos dados desde dos puntos dados.

49. Demuestre el Teorema de Ptolomeo y su recíproco por inversión.

50. Una tangente a una circunferencia es cortada armónicamente por los lados de un cuadrado circunscrito y asimismo, por los lados de un trapecio.

51. Si los puntos A, B, C están en una línea u y los puntos A', B', C' están en una línea u' y si AA', BB', CC' son concurrentes, entonces las intersecciones de BC' y $B'C$, CA' y $C'A$, AB' y $A'B$ son colineales y la línea en que están pasa por el punto común a u y u'.

52. Si $\{ABCD\} = h$ y $\{ABCD'\} = k$, muéstrese que $\{ACD'D\} = \dfrac{h-1}{k-1}$.

53. Si dos polígonos semejantes están inscritos en la misma circunferencia son congruentes.

54. Construir un triángulo cuyos lados pasen por tres puntos dados que sea semejante a un triángulo dado y cuya área sea máxima.

55. Por un punto P trácese una línea que forme con los lados de un ángulo dado un triángulo que tenga un perímetro dado.

56. Se trazan dos tangentes a una circunferencia. Muéstrese que la distancia de cualquier punto en el arco menor a la cuerda de contacto es una media proporcional a las distancias del punto a las dos tangentes.

57. Si A, B y C, D son dos parejas de puntos que están respectivamente en dos circunferencias distintas y tales que A, C y B, D son parejas antihomólogas respecto al mismo centro de homotecia, entonces AB y CD se intersecan en el eje radical.

58. Si por cualquier punto de una diagonal de un paralelogramo se trazan líneas paralelas a los lados, muéstrese que los paralelogramos que están en lados opuestos de la diagonal son iguales. Enuncie y demuestre el recíproco.

59. Las perpendiculares que pasan por los excentros de un triángulo a los lados correspondientes del triángulo son concurrentes. Identifíquese el punto de intersección.

60. Utilizando el método de inversión trácese una circunferencia que sea tangente a cada una de tres circunferencias que tienen un punto en común.

61. Si tres circunferencias iguales tienen un punto en común los otros tres puntos en que se intersecan están en una circunferencia que es igual a cada una de las circunferencias dadas.

62. Muéstrese que el diámetro de una circunferencia inscrita en un cuadrante de una circunferencia dada es igual al lado de un octágono regular circunscrito en la circunferencia dada.

63. Hállese el lugar geométrico de un punto desde el cual dos segmentos dados de la misma línea recta subtienden ángulos iguales.

64. El radio de la circunferencia polar de un triángulo obtusángulo es menor que el diámetro de la circunferencia circunscrita.

65. El circuncentro de un triángulo es el punto medio del segmento que une el incentro y el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los excentros.

66. Si de un punto cualquiera en una circunferencia se trazan líneas a los vértices de un hexágono regular inscrito, la suma de las dos líneas mayores de éstas es igual a la suma de las cuatro restantes.

67. La línea que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de sus diagonales.

68. Si P, Q, R son simétricos respecto al circuncentro del triángulo ABC, con respecto a los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente, muéstrese que AP, BQ, CR son concurrentes.

69. La suma de los productos de las dos parejas de lados opuestos a un cuadrilátero convexo, no es menor que el producto de las diagonales.

70. Si cuatro puntos son concíclicos, muéstrese que las circunferencias de los nueve puntos de los cuatro triángulos que determinan por tercias tienen un punto en común.

71. La circunferencia determinada por dos vértices de un triángulo y su incentro tiene su centro en la circunferencia circunscrita del triángulo.

72. A y B son dos puntos en el mismo lado de la línea u. Encontrar un punto C en u tal que $AC + CB$ sea menor que $AD + DB$, donde D es cualquier otro punto en u.

73. Dado el triángulo ABC y las tangentes a la circunferencia circunscrita en A y B. Se pide construir con regla solamente la tangente en C.

74. Si A, B, C, D son puntos colineales demostrar que

$$BD \cdot CD \cdot BC + CD \cdot AD \cdot CA + AD \cdot BD \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0.$$

75. Calcular las longitudes de los lados de un triángulo en función de las longitudes de sus medianas. Del resultado, demostrar que tres veces la suma de los cuadrados de los lados es igual a cuatro veces la suma de los cuadrados de las medianas.

76. ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que bisecan dos circunferencias dadas?

77. El diámetro de la circunferencia inscrita en un triángulo no es mayor que el radio de su circunferencia circunscrita.

78. Si un cuadrilátero se circunscribe a una circunferencia de radio r y se inscribe en una circunferencia de radio R, entonces

$$\frac{1}{(R+e)^2} + \frac{1}{(R-e)^2} = \frac{1}{r^2},$$

donde e es la distancia entre los centros de las circunferencias.

79. La suma de los exradios de un triángulo menos su inradio es igual al doble del diámetro de la circunferencia circunscrita.

80. En una circunferencia dada inscribir un cuadrilátero teniendo dos lados opuestos y la suma de los otros dos lados.

81. Encontrar por medio del Teorema de Ptolomeo la longitud del lado de un octágono regular inscrito en una circunferencia de radio r.

82. El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de los segmentos determinados en la hipotenusa por la circunferencia inscrita.

83. Los circuncentros de los cuatro triángulos determinados por los lados de un cuadrilátero completo son concíclicos.

84. A y B son dos puntos fuera de la línea l. Encontrar C en la línea l tal que $AC + CB$ sea igual a una longitud dada.

85. Si los vértices de un triángulo están en los lados de otro triángulo y dividen a éstos en una razón fija, los triángulos tienen el mismo punto mediano.

86. Dos triángulos cuyos vértices están en los lados de un tercer triángulo a distancias iguales de los puntos medios de los lados tienen áreas iguales.

87. Una circunferencia O pasa por el centro de una segunda circunferencia O e interseca esta última. Demostrar que las tangentes comunes tocan O en puntos que están en una tangente a O'.

88. Construir un triángulo teniendo un triángulo dado como su primer Triángulo de Brocard.

89. ¿Bajo qué condiciones el paralelogramo obtenido uniendo sucesivamente los puntos medios de un cuadrilátero es un rectángulo? ¿Un rombo? ¿Un cuadrado?

90. Demostrar que el incentro de un triángulo está dentro del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados.

91. Un cuadrilátero es inscrito a una circunferencia y circunscrito a otra. Demostrar que las líneas que unen los puntos de tangencia de los lados opuestos con la circunferencia inscrita son perpendiculares una a otra.

92. Construir un rectángulo de área dada y que cada uno de sus lados pase por un punto dado.

93. Construir un triángulo dados, el ortocentro, el incentro y un vértice.

94. Demostrar que un triángulo es equilátero si coinciden cualesquiera dos de los siguientes puntos: el incentro, el circuncentro, el centroide.

95. Si ABC es un triángulo escaleno con un punto arbitrario O dentro de él, y si AO, BO, CO intersecan los lados opuestos en L, M, N demostrar que $OL + OM + ON$ es menor que el lado mayor del triángulo.

96. Encontrar un punto P dentro del triángulo ABC, tal que

$$\Delta PBC : \Delta PCA : \Delta PAB = a^2 : b^2 : c^2,$$

donde, a, b, c son las longitudes de tres segmentos de línea dados.

97. Demostrar que el radio de la circunferencia determinada por el incentro y dos excentros de un triángulo, es cuatro veces mayor que el radio de la circunferencia de los nueve puntos.

98. Dados los vértices de un triángulo equilátero. Construir la circunferencia inscrita y circunscrita usando compás solamente.

99. Usando compás solamente, inscribir un triángulo equilátero en un cuadrado dado, con uno de los vértices del triángulo coincidiendo con uno de los vértices del cuadrado.

100. Dividir un segmento de línea que está dado por sus extremos, en razones media y extrema, con el compás únicamente. Compare la exactitud y simplicidad de la solución con la solución clásica al mismo problema con regla y compás.

BIBLIOGRAFIA

JOHNSON, *Modern Geometry*, 1929, Houghton Mifflin Co.

ALTSHILLER-COURT, *College Geometry*, 1925, Johnson Publishing Co.

LACHLAN, *Modern Pure Geometry*, 1927, The Macmillan Co.

GODFREY y SIDDONS, *Modern Geometry*, 1928, Cambridge University Press.

DURELL, *Modern Geometry*, 1920, The Macmillan Co.

GRAUSTEIN, *Higher Geometry*, 1937, The Macmillan Co.

COOLIDGE, *Treatise on the Circle and the Sphere*, 1916, Oxford University Press.

BAKER, *Principles of Geometry*, Vol. 2, 1922, Cambridge University Press.

CASEY, *A Sequel to Euclid*, Par. I, 1910, Longmans, Green & Co.

PETERSEN, *Problems of Geometrical Constructions*, Trad. por HAAGENSEN, Reimp 1923, Stechert & Co.

MILNE, *Cross Ratio Geometry*, 1911, Cambridge University Press.

CREMONA, *Projective Geometry*, Trad. por LEUDESDORF, 1885, Oxford University Press.

HOLGATE, *Projective Pure Geometry*, 1930, The Macmillan Co.

PATTERSON, *Projective Geometry*, 1937, John Wiley & Sons.

LEHMER, *Elementary Synthetic Projective Geometry*, 1917, Ginn & Co.

FOURREY, *Constructions géométriques*, 1923, París.

MASCHERONI, *Géométrie du compas*, French Trad. por CARETTE, 1798, París.

KLEIN, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Trad. por HEDRICK y NOBLE, 1932, The Macmillan Co.

KLEIN, *Famous Problems of Elementary Geometry*, Trad. por BEMAN y SMITH, 1897, Ginn & Co.